С. К. Ландо

ЛЕКЦИИ

о производящих функциях

Москва
МЦНМО
2007

УДК 519.1
ББК 22.176
Л22

Ландо С. К.
Л22 Лекции о производящих функциях. — 3-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.
ISBN 978-5-94057-042-4

Настоящая книга посвящена производящим функциям — языку, на котором говорит современная перечислительная комбинаторика. Этот язык используется и во многих других областях математики и математической физики. Книга предназначена, в первую очередь, для студентов младших курсов физико-математических специальностей. В ней разобрано много примеров и содержится большое количество задач для самостоятельного решения.

Предыдущее издание книги вышло в 2004 г.

ББК 22.176

Учебное издание

Ландо Сергей Константинович

Лекции о производящих функциях

Иллюстрации *М. Н. Вялый*

Подписано в печать 28.06.2007 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 9. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга», Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (495) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-94057-042-4

© Ландо С. К., 2007.
© МЦНМО, 2007.

Оглавление

Предисловие **5**

Предисловие к третьему изданию **6**

Глава 1. Формальные степенные ряды и производящие функции. Действия над формальными степенными рядами. Элементарные производящие функции **7**

1.1 Счастливые билеты 7
1.2 Выводы 12
1.3 Производящие функции 13
1.4 Элементарные производящие функции 16
1.5 Дифференцирование и интегрирование 17
1.6 Алгебра и топология формальных степенных рядов 18
1.7 Задачи 19

Глава 2. Производящие функции для известных последовательностей **21**

2.1 Геометрическая прогрессия 21
2.2 Последовательность Фибоначчи 22
2.3 Рекуррентные соотношения 24
2.4 Произведение Адамара 26
2.5 Числа Каталана 28
2.6 Задачи 33

Глава 3. Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа **37**

3.1 Язык Дика 37
3.2 Правила вывода 38
3.3 Формальные грамматики 40
3.4 Уравнение Лагранжа 43
3.5 Задачи 44

Глава 4. Аналитические свойства функций, представляемых степенными рядами, и асимптотика их коэффициентов **46**

4.1 Степенные оценки 46
4.2 Асимптотика гипергеометрических последовательностей . . . 48
4.3 Асимптотика и уравнение Лагранжа 53
4.4 Асимптотика и характер особенностей 54
4.5 Задачи 55

Глава 5. Производящие функции нескольких переменных 57
5.1 Треугольник Паскаля . . . 57
5.2 Экспоненциальные производящие функции . . . 59
5.3 Треугольник Дика . . . 61
5.4 Треугольник Бернулли—Эйлера . . . 62
5.5 Многочлены Бернулли . . . 69
5.6 Непрерывные дроби . . . 71
5.7 Числа Эйлера . . . 76
5.8 Сравнения . . . 77
5.9 Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . 80
5.10 Задачи . . . 82

Глава 6. Разбиения и разложения 86
6.1 Разбиения и разложения . . . 86
6.2 Тождество Эйлера . . . 90
6.3 Непрерывные дроби . . . 93
6.4 Задачи . . . 96

Глава 7. Производящие функции Дирихле и формулы включения-исключения 99
7.1 Принцип включения-исключения . . . 99
7.2 Функции Дирихле . . . 102
7.3 Обращение Мчбиуса . . . 104
7.4 Мультипликативные последовательности . . . 106
7.5 Задачи . . . 108

Глава 8. Перечисление деревьев 110
8.1 Перечисление помеченных деревьев . . . 110
8.2 Тождества Абеля . . . 115
8.3 Производящие функции . . . 119
8.4 Плоские и бинарные деревья . . . 120
8.5 Задачи . . . 122

Глава 9. Перечисление вложенных графов 123
9.1 Вложение графа . . . 123
9.2 О числе склеек многоугольника . . . 132
9.3 Теорема Харера—Загира . . . 135
9.4 Задачи . . . 139

Заключительные замечания и указания к библиографии 140

Список литературы 141

Предметный указатель 143

А. А. Кириллову,
от которого я впервые услышал слова
«производящая функция»

Предисловие

После умножения на $(2n-1)!$ коэффициент при x^{2n-1} разложения функции $\operatorname{tg} x$ по степеням x становится положительным целым числом. Что более удивительно, это число оказывается равным числу пилообразных перестановок на множестве $\{1, \ldots, 2n-1\}$. Функция $\operatorname{tg} x$ тем самым является «экспоненциальной производящей функцией» для последовательности, образованной числами пилообразных перестановок. Этот факт можно доказать, однако нельзя сказать, чтобы мы вполне понимали природу стоящего за ним явления. Функция $\operatorname{tg} x$ не одинока — коэффициенты разложения в ряд многих «классических» функций имеют комбинаторную интерпретацию. Сюда относятся тригонометрические, гипергеометрические, эллиптические функции, эллиптические интегралы и т. д. Можно даже утверждать, что если функция представляет интерес «сама по себе», а не как элемент некоторой совокупности функций, то ее коэффициенты имеют комбинаторный смысл.

Математики XVIII—XIX веков знали функции «в лицо». Вряд ли число специалистов, владеющих этим искусством сейчас, намного превышает их число столетие назад. А ведь корни производящей функции, ее асимптотическое поведение, круг сходимости, тип особенностей, топология соответствующей римановой поверхности могут многое сказать о характере описываемых ею объектов.

Производящие функции естественным образом разбиваются на классы. Простейший из них — класс рациональных функций — хорошо изучен, и известны многочисленные примеры задач, приводящих к рациональным производящим функциям. Алгебраические производящие функции также встречаются очень часто. В начале 60-х годов Шютценберже показал, что их некоммутативные аналоги естественно возникают в языках, порождаемых формальными грамматиками с однозначным выводом. Однако класс алгебраических функций (в отличие от рациональных) незамкнут относительно естественной операции — произведения Адамара. Произведение Адамара двух алгебраических функций может оказаться алгебро-логарифмической функцией. Класс алгебро-логарифмических функций уже выглядит очень естественным.

Связь алгебраических функций с формальными грамматиками указывает на существенную одномерность перечисляемых объек-

тов — слова в языках записываются линейно. Объекты, перечисление которых оказывается необходимым в современных моделях квантовой теории поля, носят существенно двумерный характер. Природа возникающих здесь производящих функций не понята до сих пор. Придуманный физиками изящный метод представления таких функций в виде матричных интегралов позволяет получить окончательные результаты лишь в отдельных случаях.

Мне хотелось написать простую и доступную книгу, уделив внимание в первую очередь ярким примерам, а не общим теориям (которые, к тому же, зачастую отсутствуют). В результате за ее бортом оказались многие важные приложения метода производящих функций, среди которых теория перечисления Полиа и q-аналоги, производящие многочлены Пуанкаре топологических многообразий и производящие семейства, теория разветвленных накрытий и многое другое.

Мой интерес к комбинаторике обязан своим происхождением ряду задач, которые были поставлены В. И. Арнольдом в связи с некоторыми проблемами теории особенностей, а также его собственным работам в этой области. Значительное влияние на меня оказали работы французской комбинаторной школы, в первую очередь Лаборатории по исследованиям в области информатики Университета г. Бордо (Ж. Вьенно, Р. Кори, М. Делест, а также Ф. Флажоле). Предлагаемая вниманию читателей книга написана на основе специального курса, читавшегося студентам Независимого московского университета в 1992–99 гг. Большую помощь в проведении занятий оказал мне М. Н. Вялый, который также подготовил материалы этих лекций к предварительному изданию. Для настоящего издания книга существенно переработана. Основным источником моих знаний по комбинаторике послужил мой друг и соавтор А. К. Звонкин, чье искусство создания текстов остается для меня недостижимым, увы, образцом.

С. К. Ландо

Предисловие к третьему изданию

Настоящее издание расширено за счет добавления описания многочленов Бернулли и тождеств Абеля. Подход к многочленам Бернулли следует рекомендациям Д. Загира. Кроме того, исправлены незначительные опечатки.

С. К. Ландо

Глава 1

Формальные степенные ряды и производящие функции. Действия над формальными степенными рядами. Элементарные производящие функции

1.1. Задача о числе счастливых билетов

Начнем с задачи, которой А. А. Кириллов открывал свой семинар в начале 70-х годов. В те времена человек, едущий в общественном транспорте, должен был купить билет в автоматической кассе или у кондуктора. Билеты были перенумерованы шестизначными номерами.

Билет называется *счастливым*, если сумма первых трех цифр его номера равняется сумме последних трех цифр.

Так, билеты с номерами 000000 и 123060 — счастливые, а билет с номером 123456 — несчастливый. Счастливый билет полагалось на счастье съесть.

Итак, *сколько всего существует счастливых билетов*?

Человеку, владеющему элементарными навыками программирования, нетрудно написать программу для подсчета числа счастливых билетов. Простейшая такая программа перебирает все номера от 000000 до 999999, отбирая среди них счастливые. Давайте, однако, приглядимся к задаче повнимательнее.

Разобьем все счастливые билеты на классы, в каждом из которых сумма первых трех цифр одинакова. Эта сумма может принимать значения от 0 (для тройки цифр 000) до 27 (для тройки 999). Поэтому число классов равно 28. Обозначим через a_n число различных троек цифр с суммой цифр n. Первые несколько значений a_n нетрудно вычислить:

$a_0 = 1$ (есть всего одна тройка цифр 000 с суммой 0);
$a_1 = 3$ (есть три тройки 001, 010, 001 с суммой цифр 1);
$a_2 = 6$ (тройки 002, 020, 200, 011, 101, 110).

Легко видеть, что число счастливых билетов, сумма первых трех цифр которых равна n, есть a_n^2. Действительно, как в начале, так и в конце номера счастливого билета можно поставить любую тройку цифр с суммой n. Таким образом, для подсчета числа счастливых билетов нам достаточно вычислить числа a_n, а затем найти сумму квадратов этих 28 чисел.

Для вычисления значений a_n попробуем подсчитать сначала число одно- и двузначных чисел с суммой цифр n. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$ существует ровно одно однозначное число с суммой цифр n (запись этого числа совпадает с записью числа n). Будем описывать однозначные числа многочленом

$$A_1(s) = 1 + s + s^2 + \ldots + s^9.$$

Смысл у этого многочлена следующий:

коэффициент при s^n в многочлене A_1 равен числу однозначных чисел, сумма цифр которых равна n.

Другими словами, коэффициент при s^n в многочлене A_1 равен 1, если $0 \leqslant n \leqslant 9$, и равен 0, если $n > 9$.

Выпишем теперь многочлен $A_2(s)$, описывающий двузначные числа. Коэффициент при s^n в многочлене $A_2(s)$ равен числу двузначных чисел с суммой цифр n. (Мы рассматриваем и такие двузначные числа, в которых первая цифра или даже обе цифры могут равняться нулю.)

Нетрудно видеть, что степень многочлена A_2 равна 18. Действительно, 18 — наибольшая возможная сумма цифр двузначного числа. Несложно сосчитать и первые несколько коэффициентов этого многочлена:

$$A_2(s) = 1 + 2s + 3s^2 + 4s^3 + \ldots$$

Оказывается, многочлен A_2 легко строится по многочлену A_1.

Предложение 1.1. $A_2(s) = (A_1(s))^2$.

Доказательство. Произведение мономов s^k и s^m дает вклад в коэффициент при мономе s^n многочлена $(A_1(s))^2$ в том и только в том случае, если $n = k + m$. Поэтому коэффициент при мономе s^n в многочлене $(A_1(s))^2$ есть в точности число способов представить число n в виде суммы $n = k + m$ ($k, m = 0, 1, \ldots, 9$). Таким

образом, многочлен в правой части равенства совпадает с многочленом A_2. □

Теперь нетрудно выписать и многочлен $A_3(s) = a_0 + a_1 s + \ldots$ $\ldots + a_{27} s^{27}$.

Предложение 1.2. $A_3(s) = (A_1(s))^3$.

Доказательство. Доказательство практически дословно совпадает с доказательством предыдущего утверждения: коэффициент при s^n в многочлене $(A_1(s))^3$ равен числу представлений числа n в виде суммы трех цифр, $n = m + k + l, \quad m, k, l = 0, 1, \ldots, 9$. □

Итак, задача о числе счастливых билетов практически решена: осталось вычислить многочлен $(A_1(s))^3$ и подсчитать сумму квадратов его коэффициентов. Обратите внимание на то, что умножение на многочлен $A_1(s)$ — очень простая операция. Вычисления можно провести вручную, затратив на них около десяти минут. Надобность в написании программы отпадает.

Однако можно не останавливаться на достигнутом и пойти дальше[1]. Излагаемый ниже подход к решению задачи о счастливых билетах, принадлежит — тогда десятикласснику — В. Дринфельду.

Рассмотрим наряду с многочленом $A_3(s)$ «многочлен Лорана» $A_3(1/s)$ от переменной s:

$$A_3\left(\frac{1}{s}\right) = a_0 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_{27}}{s^{27}}.$$

Произведение $A_3(s)A_3\left(\frac{1}{s}\right)$ также является многочленом Лорана (т. е. оно содержит мономы вида s^k, где k может быть как положительным, так и отрицательным, но при этом его значения ограничены сверху и снизу). Свободный член (коэффициент при s^0) в этом произведении имеет вид $a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{27}^2$, и мы заключаем, что

число счастливых билетов равно свободному члену многочлена Лорана $A_3(s)A_3(1/s)$.

Для вычисления этого свободного члена мы можем теперь воспользоваться базисным фактом теории функций комплексного переменного — теоремой Коши.

[1] Последующий текст (до конца раздела) требует владения элементами математического анализа и может быть пропущен без ущерба для понимания дальнейшего.

Теорема 1.3 (Коши). *Для любого многочлена Лорана $p(s)$ его свободный член p_0 равен*

$$p_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{p(s)ds}{s},$$

где интеграл берется по любой окружности на комплексной прямой, ориентированной против часовой стрелки и содержащей внутри себя начало координат.

Другими словами, интеграл от $s^k ds$ по такой окружности равен $2\pi i$ при $k=-1$, и он равен 0 при всех остальных целых значениях k. Этот факт легко проверить.

Для наших целей наиболее удобной оказывается окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Воспользовавшись тем, что

$$A_1(s) = 1 + s + \ldots + s^9 = \frac{1-s^{10}}{1-s},$$

представим требуемый многочлен Лорана в виде

$$P(s) = A_3(s)A_3\Big(\frac{1}{s}\Big) = A_1^3(s)A_1^3\Big(\frac{1}{s}\Big) = \\ = \Big(\frac{1-s^{10}}{1-s}\Big)^3\Big(\frac{1-s^{-10}}{1-s^{-1}}\Big)^3 = \Big(\frac{2-s^{10}-s^{-10}}{2-s-s^{-1}}\Big)^3.$$

Вводя на единичной окружности стандартный параметр φ и ограничивая на нее многочлен Лорана $P(s)$, получаем выражение для его свободного члена:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{2-2\cos(10\varphi)}{2-2\cos\varphi}\Big)^3 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(5\varphi)}{\sin^2\Big(\frac{\varphi}{2}\Big)}\right)^3 d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\Big)^6 d\varphi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\Big)^6 d\varphi. \quad (1.1)$$

Попробуем оценить значение последнего интеграла. График функции $f(\varphi) = \dfrac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$ на отрезке $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ выглядит так, как показано на рис. 1.1. В нуле функция достигает своего максимума, равного 10. Вне отрезка $\Big[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\Big]$ величина функции f не превосходит $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} \approx 3$. Поэтому вклад дополнения к отрезку $\Big[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\Big]$ в интеграл (1.1) не превосходит $\pi\cdot 3^6 \approx 2100$ (на самом деле он значительно меньше).

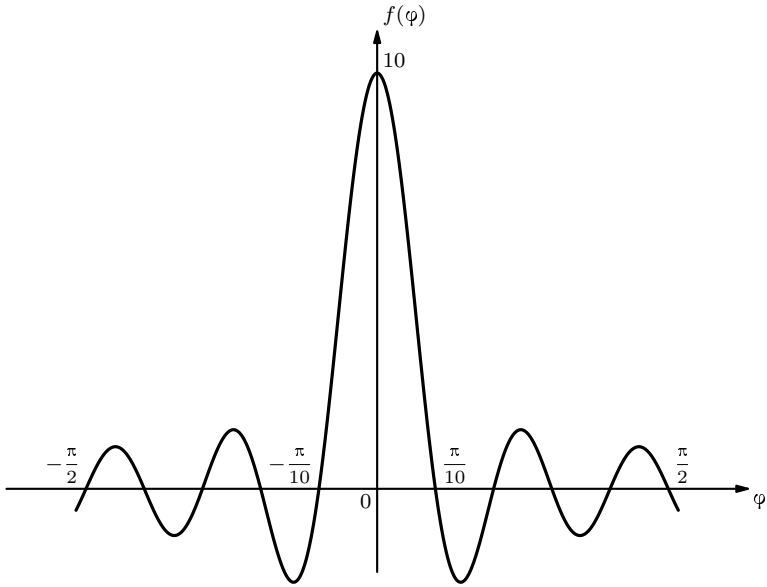


Рис. 1.1. Вид графика функции $f(\varphi) = \dfrac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$

Основная же составляющая интеграла (1.1) сосредоточена на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right]$. Для оценки вклада этого отрезка воспользуемся *методом стационарной фазы*. Этот метод позволяет оценить значение интеграла

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f} d\varphi$$

при $t \to \infty$. При больших значениях t величина интеграла определяется поведением функции $\ln f$ («фазы») в окрестности своей стационарной точки 0 (точки, в которой $(\ln f)' = 0$, или, что то же самое, $f' = 0$). В окрестности нуля $f(\varphi) \approx 10\left(1 - \dfrac{33}{2}\varphi^2\right)$, а $\ln f(\varphi) \approx \ln 10 - \dfrac{33}{2}\varphi^2$. При больших t имеем

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)} d\varphi = e^{t\ln 10} \int\limits_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}t\varphi^2} d\varphi \approx e^{t\ln 10}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{33t}}.$$

Полагая $t = 6$ и вспоминая формулу (1.1), получаем приближенное равенство

$$p_0 \approx \frac{10^6}{3\sqrt{11\pi}} \approx 56\,700.$$

Полученный результат с хорошей точностью (отклонение составляет не более 3%) приближает искомое значение.

Еще один подсчет числа счастливых билетов, основанный на совершенно других принципах, приведен в разделе 7.1.

1.2. Выводы

На основании рассмотренного примера можно сделать некоторые выводы о задачах, которыми мы будем заниматься, и методах, которыми мы при этом будем пользоваться.

Предметом нашего исследования будут задачи перечислительной комбинаторики. Они заключаются в подсчете числа объектов, принадлежащих некоторому семейству конечных множеств. У каждого множества семейства имеется свой номер (в задаче о числе счастливых билетов таким номером была сумма цифр трехзначного числа).

Как правило, задача перечислительной комбинаторики «в принципе» разрешима: для каждого множества из семейства можно выписать все его элементы и таким образом узнать их число. Проблема, однако, состоит в том, чтобы найти «хорошее» решение, не требующее выписывания всех элементов изучаемых множеств.

Определить, что такое хорошее решение, довольно трудно. Зачастую можно лишь сравнить два решения и сказать, какое из них лучше.

При решении задач перечислительной комбинаторики очень полезно рассматривать производящие многочлены (или, более общо, производящие ряды). В нашем случае пользу принес производящий многочлен A_3. Операции с комбинаторными объектами очень естественно выражаются в терминах производящих функций. Так, переход от однозначных чисел с заданной суммой цифр к трехзначным числам состоял просто в возведении производящего многочлена A_1 в куб.

Привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа) дает новый взгляд на перечислительные задачи и позволяет находить неожиданные подходы к их решению.

1.3. Производящие функции и действия над ними

Перейдем к строгим определениям.

Определение 1.4. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией* (*производящим рядом*) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots,$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом*.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

Замечание 1.5. Употребляя слово «функция», мы вовсе не имеем в виду, что написанное выражение действительно является функцией. Так, не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно «значение $A(s_0)$ производящей функции A в точке s_0». Переменная s является *формальной*, и сумма ряда $a_0 + a_1 s_0 + a_2 s_0^2 + \ldots$ смысла не имеет. Однако верно утверждение $A(0) = a_0$, т. е. мы знаем значение производящей функции в нуле.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» мы будем также пользоваться термином «формальный степенной ряд».

Определение 1.6. *Суммой* двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots$$

Произведением производящих функций A и B называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)s + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)s^2 + \dots$$

Операции сложения и умножения производящих функций, очевидно, коммутативны и ассоциативны.

Определение 1.7. Пусть

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$$

и

$$B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots$$

— две производящие функции, причем $B(0) = b_0 = 0$.

Подстановкой производящей функции B в производящую функцию A называется производящая функция

$$A(B(t)) = a_0 + a_1b_1t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)t^3 + \dots$$

Если, например, $B(t) = -t$, то

$$A(B(t)) = A(-t) = a_0 - a_1t + a_2t^2 - a_3t^3 + \dots$$

Обратите внимание на то, что операция подстановки функции, отличной от нуля в нуле, не определена. При попытке подставить такую функцию мы столкнулись бы с необходимостью суммировать бесконечные числовые ряды.

Конечно же, если обе производящие функции A и B являются многочленами, то определения суммы, произведения и подстановки для них совпадают с обычными определениями этих операций для многочленов.

Чтобы познакомиться с производящими функциями поближе, давайте докажем важную теорему.

Теорема 1.8 (об обратной функции). *Пусть функция*

$$B(t) = b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots$$

такова, что $B(0) = b_0 = 0$, *а* $b_1 \neq 0$. *Тогда существуют такие функции*

$$A(s) = a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots, \qquad A(0) = 0,$$

и

$$C(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots, \qquad C(0) = 0,$$

что

$$A(B(t)) = t \quad \text{и} \quad B(C(u)) = u.$$

Функции A и C единственны.

Функция A называется *левой обратной*, а функция C — *правой обратной* к функции B.

Доказательство. Докажем существование и единственность левой обратной функции. Доказательство для правой обратной аналогично. Будем определять коэффициенты функции A последовательно. Коэффициент a_1 определяется из условия $a_1 b_1 = 1$, откуда

$$a_1 = \frac{1}{b_1}.$$

Предположим теперь, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже определены. Коэффициент a_{n+1} определяется из условия

$$a_{n+1} b_1^{n+1} + \ldots = 0,$$

где точками обозначен некоторый многочлен от $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$. Тем самым, условие представляет собой линейное уравнение на a_{n+1}, причем коэффициент b_1^{n+1} при a_{n+1} отличен от нуля. Такое уравнение имеет единственное решение, и теорема доказана. □

Итак, мы научились складывать и умножать степенные ряды и подставлять их друг в друга. Хотелось бы также научиться делить их друг на друга. Последняя операция не всегда корректно определена. В этом отношении степенные ряды похожи на целые числа: не всегда целое число при делении на другое целое число дает в ответе целое число. Однако, во всяком случае, возможно деление на степенной ряд, значение которого в нуле отлично от нуля.

Предложение 1.9. *Пусть*

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots$$

— формальный степенной ряд, причем $A(0) \neq 0$. Тогда существует единственный формальный степенной ряд

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots,$$

такой что $A(s)B(s) = 1$.

Доказательство. Снова проведем доказательство по индукции. $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$. Пусть теперь все коэффициенты ряда B вплоть до степени $n-1$ однозначно определены. Коэффициент при s^n определяется из условия

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0.$$

Это линейное уравнение на b_n, причем коэффициент a_0 при b_n отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет единственное решение. □

1.4. Элементарные производящие функции

Всякий раз записывать производящие функции в виде ряда неудобно. Поэтому для некоторых часто встречающихся функций используется сокращенная запись.

Определение 1.10.

1) $(1+s)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}s + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}s^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}s^3 + \ldots$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и α — произвольное комплексное число.

Коэффициент при s^n в этой производящей функции называется *числом сочетаний из* α *элементов по* n и обозначается через

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!};$$

2) $e^s = \exp s = 1 + \dfrac{1}{1!}s + \dfrac{1}{2!}s^2 + \dfrac{1}{3!}s^3 + \ldots;$

3) $\ln\left(\dfrac{1}{1-s}\right) = s + \dfrac{1}{2}s^2 + \dfrac{1}{3}s^3 + \ldots;$

4) $\sin s = s - \dfrac{1}{3!}s^3 + \dfrac{1}{5!}s^5 - \ldots;$

5) $\cos s = 1 - \dfrac{1}{2!}s^2 + \dfrac{1}{4!}s^4 - \ldots$

Разложение 1) в определении 1.10 было введено Ньютоном и называется *биномом Ньютона*. При целом положительном значении α оно совпадает с обычным определением степени бинома. Пользуясь этим, мы можем получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, значения $s = 1$ и $s = -1$, получаем

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \ldots + \frac{\alpha!}{\alpha!} = 2^\alpha, \tag{1.2}$$

$$\binom{\alpha}{0} - \binom{\alpha}{1} + \ldots + (-1)^\alpha \binom{\alpha}{\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

для любого целого положительного α.

Кроме того, между введенными элементарными функциями имеются естественные соотношения, которые также связаны с комбинаторными тождествами. Докажем, например, что

$$e^s e^{-s} = 1.$$

Действительно, свободный член произведения равен 1, а при $n > 0$ коэффициент при s^n в произведении равен

$$\frac{1}{n!\,0!} - \frac{1}{(n-1)!\,1!} + \frac{1}{(n-2)!\,2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{0!\,n!}.$$

Умножая последнее выражение на $n!$, получаем левую часть равенства (1.3) при $\alpha = n$, что и доказывает наше утверждение.

1.5. Дифференцирование и интегрирование производящих функций

Определение 1.11. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция. *Производной* этой функции называется функция

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots + n a_n s^{n-1} + \ldots$$

Интегралом называется функция

$$\int A(s) = a_0 s + a_1 \frac{s^2}{2} + a_2 \frac{s^3}{3} + \ldots + a_n \frac{s^{n+1}}{(n+1)} + \ldots$$

Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left(\int A(s)\right)' = A(s).$$

Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции.

Замечание 1.12. Нетрудно видеть, что для функций, представимых в виде степенных рядов, формула для производной соответствует обычной. Формула для интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом

$$\int A(s) = \int_0^s A(\xi)\,d\xi.$$

Последнее замечание позволяет подсчитывать (т. е. выражать в терминах элементарных) производящие функции для большого числа разнообразных последовательностей. Вычислим, например, производящую функцию

$$f(s) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}s + \frac{1}{3\cdot 4}s^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}s^n + \ldots$$

Умножая функцию f на s^2 и дифференцируя, получаем

$$(s^2 f(s))' = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \ldots = \ln(1-s)^{-1},$$

откуда

$$f(s) = s^{-2}\int \ln(1-s)^{-1} = s^{-2}((s-1)\ln(1-s)^{-1} + s).$$

1.6. Алгебра и топология формальных степенных рядов

Ниже приводятся некоторые сведения из теории формальных степенных рядов. Они не используются в книге, но могут помочь обозначить место этой теории в ряду других математических дисциплин.

С алгебраической точки зрения множество формальных степенных рядов (с коэффициентами в поле комплексных, вещественных или рациональных чисел) образует (бесконечномерное) *векторное пространство* над этим полем. Операция умножения рядов превращает это векторное пространство в *алгебру*, которая обозначается $\mathbb{C}[[s]]$ (соотв., $\mathbb{R}[[s]]$ или $\mathbb{Q}[[s]]$). Важную роль в этой алгебре играют *идеалы*, т. е. такие подмножества $I \subset \mathbb{C}[[s]]$, что $fI \subset I$ для любого элемента $f \in \mathbb{C}[[s]]$. В алгебре формальных степенных рядов все идеалы — *главные*, т. е. все они имеют вид $f\mathbb{C}[[s]]$ для некоторой функции $f \in \mathbb{C}[[s]]$. Более того, все идеалы легко описать: они имеют вид $I_k = s^k\mathbb{C}[[s]]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (т. е. идеал I_k состоит из всех формальных степенных рядов, делящихся на s^k). Один из идеалов I_k, а именно I_1, максимален: он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от всей алгебры. Алгебра с одним максимальным идеалом называется *локальной*. Свойство локальности сближает алгебру формальных степенных рядов с координатными алгебрами в окрестности начала координат (алгебрами *ростков* бесконечно дифференцируемых или аналитических функций). *Факторалгебры* $\mathbb{C}[[s]]/I_k$ называются *алгебрами срезанных многочленов* и тоже очень важны.

В алгебре формальных степенных рядов определена *топология*. *Открытыми* в этой топологии являются идеалы I_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и пустое множество. Введенная топология определяет понятие *сходимости*: последовательность $F_1(s), F_2(s), \ldots$ *сходится* к формальному степенному ряду

$F(s)$, если для любого числа n существует такой номер N, что все коэффициенты при степенях s^0, s^1, ..., s^n у рядов $F_k(s)$ при $k > N$ совпадают с коэффициентами при соответствующих степенях у ряда $F(s)$. В частности, последовательность частичных сумм ряда $F(s)$ сходится к $F(s)$.

1.7. Задачи

1.1. Выпишите явно многочлены A_2 и A_3 и подсчитайте точно число счастливых билетов.

1.2. Найдите выражение для числа счастливых билетов из $2r$ цифр в системе счисления с основанием q.

1.3. Докажите следующие равенства:

а) $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$;

б) $(1+s)^\alpha(1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$;

в) $\exp(\ln((1-s)^{-1})) = (1-s)^{-1}$;

г) $\ln(1+s) = s - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}s^n + \ldots$;

д) $\ln((1-s)^\alpha) = \alpha\ln(1-s)$.

1.4. Пусть функция $B = B(s) = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots$ такова, что $b_1 \neq 0$. Докажите, что правая обратная функция $A(s)$ и левая обратная функция $C(s)$ совпадают. Эта общая *обратная функция* обозначается через $B^{-1}(t)$.

1.5. Докажите, что степенные ряды вида

$$a_1 s + a_2 s^2 + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$

образуют группу относительно операции композиции.

1.6. Докажите, что не существует такого формального степенного ряда $A(s)$, что $sA(s) = 1$.

1.7. Докажите, что если каждый из степенных рядов $A(s)$ и $B(s)$ отличен от нуля, то и их произведение $A(s)B(s)$ отлично от нуля.

1.8. Пусть ряды $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, $a_0 \neq 0$, и $B(s) = b_1 s + b_2 s^2 + \ldots$, $b_1 \neq 0$, имеют целые коэффициенты. При каких условиях на коэффициенты этих рядов ряды $\frac{1}{A(s)}$, $B^{-1}(s)$ имеют целые коэффициенты?

1.9. Найдите производящие функции для последовательностей:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...;

б) $1\cdot 2$, $2\cdot 3$, $3\cdot 4$, ...;

в) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...

1.10. Докажите, что для ряда $B = B(t)$ с нулевым свободным членом, $B(0) = 0$, и произвольного ряда $A = A(s)$

$$\left(\int A\right)(B(t)) = \int (A(B(t))B'(t))$$

(формула замены переменных в интеграле).

1.11. Докажите формулу Ньютона—Лейбница

$$(A(s)B(s))' = A'(s)B(s) + A(s)B'(s).$$

1.12. Докажите формулу интегрирования по частям:

$$\int (A(s)B'(s) + A'(s)B(s)) = A(s)B(s) - A(0)B(0).$$

1.13 (биномиальная система счисления). Докажите, что при заданном натуральном значении k любое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \ldots + \binom{b_k}{k},$$

где $0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k$. Например, при $k = 1$ это верно, так как всякое число n допускает единственное представление в виде $n = \binom{n}{1}$, а при $k = 2$ имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned}
1 &= \binom{0}{1} + \binom{2}{2},\\
2 &= \binom{1}{1} + \binom{2}{2},\\
3 &= \binom{0}{1} + \binom{3}{2},\\
4 &= \binom{1}{1} + \binom{3}{2},\\
5 &= \binom{2}{1} + \binom{3}{2},\\
6 &= \binom{0}{1} + \binom{4}{2}.
\end{aligned}$$

(Напомним, что, по определению, $\binom{p}{q} = 0$ при целых p и q, таких что $0 \leqslant p < q$.)

1.14. Воспользовавшись равенством $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, дайте вывод формулы для производящей функции $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{s}{2\cdot 3} + \dfrac{s^2}{3\cdot 4} + \dfrac{s^3}{4\cdot 5} + \ldots$, отличный от приведенного в разделе 1.5.

Глава 2

Производящие функции для известных последовательностей

2.1. Геометрическая прогрессия

Простейшая последовательность — это постоянная последовательность 1, 1, 1, ... Производящая функция для нее имеет вид

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots, \tag{2.1}$$

и ее несложно выразить через элементарные производящие функции. Действительно, умножив обе части равенства (2.1) на s, получим

$$sG(s) = s + s^2 + s^3 + s^4 + \ldots = G(s) - 1,$$

откуда

$$G(s) = \frac{1}{1-s}. \tag{2.2}$$

Тот же вывод с незначительными изменениями проходит для произвольной последовательности вида a, ar, ar^2, ar^3, ... :

$$G_{a,r}(s) = a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \ldots = a(1 + (rs) + (rs)^2 + (rs)^3 + \ldots),$$

откуда

$$rsG_{a,r}(s) = G_{a,r}(s) - a$$

и

$$G_{a,r}(s) = \frac{a}{1-rs}. \tag{2.3}$$

Приведенные выше выкладки представляют собой не что иное, как известный вывод формулы для суммы геометрической прогрессии. Результат этих выкладок согласуется, как нетрудно видеть, с определением производящей функции $(1-s)^{-1}$.

2.2. Последовательность Фибоначчи

Знаменитая *последовательность Фибоначчи* определяется своими начальными членами $f_0 = f_1 = 1$ и соотношением

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \tag{2.4}$$

Из этого соотношения легко получить начало последовательности Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

в которой каждый член, начиная с f_2, равен сумме двух предыдущих. Чтобы вывести формулу производящей функции

$$\mathrm{Fib}(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \ldots, \tag{2.5}$$

умножим обе части равенства (2.5) на $s + s^2$. Получим

$$(s+s^2)\,\mathrm{Fib}(s) = s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \ldots + s^2 + s^3 + 2s^4 + 3s^5 + \ldots = \\ = s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + 8s^5 + \ldots,$$

или

$$(s+s^2)\,\mathrm{Fib}(s) = \mathrm{Fib}(s) - 1,$$

откуда

$$\mathrm{Fib}(s) = \frac{1}{1-s-s^2}. \tag{2.6}$$

Полученную формулу можно понимать как композицию двух производящих функций — $(1-s)^{-1}$ и $s + s^2$, т. е.

$$\mathrm{Fib}(s) = 1 + (s+s^2) + (s+s^2)^2 + (s+s^2)^3 + \ldots$$

Такое разложение, однако, не очень удобно, так как в его членах перемешаны различные степени переменных и оно не дает явной формулы для коэффициентов. Полезнее представить дробь в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{1-s-s^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1\left(1-\dfrac{s}{s_1}\right)} - \frac{1}{s_2\left(1-\dfrac{s}{s_2}\right)}\right),$$

где $s_1 = (-1+\sqrt{5})/2$, $s_2 = (-1-\sqrt{5})/2$ — корни уравнения $1 - s - s^2 = 0$. Из последнего разложения немедленно получаем

$$\mathrm{Fib}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}s_1}\left(1 + \frac{s}{s_1} + \frac{s^2}{s_1^2} + \ldots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}s_2}\left(1 + \frac{s}{s_2} + \frac{s^2}{s_2^2} + \ldots\right).$$

Поэтому

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_1^{-1-n} - s_2^{-1-n}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(s_1^{n+1} - s_2^{n+1}) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \quad (2.7)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $s_1 s_2 = -1$.

Другой способ вывода производящей функции для чисел Фибоначчи использует элементарные понятия линейной алгебры. Рассмотрим пару последовательных чисел Фибоначчи f_n, f_{n+1} как координаты вектора в двумерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда соотношение (2.4) можно интерпретировать как правило перехода от вектора $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ к вектору $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$:

$$\Phi\colon \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Последнее преобразование линейно, и его можно записать в матричном виде:

$$\Phi\colon \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Переход от вектора $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$ к вектору $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix}$ осуществляется путем повторного применения преобразования Φ, и т. д. Таким образом, производящая функция для векторной последовательности Фибоначчи принимает вид

$$\overline{F}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}s^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}s^3 + \ldots =$$
$$= \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}s + \Phi^2\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}s^2 + \Phi^3\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}s^3 + \ldots =$$
$$= (I + \Phi s + \Phi^2 s^2 + \Phi^3 s^3 + \ldots)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = (I - s\Phi)^{-1}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь через I обозначена единичная матрица, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и мы применили к векторной производящей функции вывод производящей функции для геометрической прогрессии. Единственное отличие в результате: выражение $(I - s\Phi)^{-1}$ понимается как *обратная матрица* к матрице $I - s\Phi$.

Явное выражение для чисел Фибоначчи можно получить, вычислив явно матрицу Φ^n для произвольного n. Для этого матрицу Φ нужно диагонализировать, представив ее в виде

$$\Phi = L^{-1}\widetilde{\Phi}L,$$

где $\widetilde{\Phi}$ — диагональная матрица, а матрица L невырождена. Имеем,

$$\Phi = \frac{1}{s_2^{-1} - s_1^{-1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2^{-1} & -1 \\ -s_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением

$$\Phi^n = L^{-1}\widetilde{\Phi}^n L$$

и выражениями для чисел s_1, s_2, получаем равенство (2.7).

2.3. Рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции

Последовательность Фибоначчи определяется линейным рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Исходя из этого соотношения и начальных значений последовательности, мы смогли найти явный вид производящей функции. Производящая функция оказалась рациональной — отношением двух многочленов. На самом деле в нашем выводе нигде не использовался специальный вид рекуррентного соотношения. Действуя точно таким же образом, мы можем доказать аналогичную теорему о производящей функции для произвольной последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением.

Теорема 2.1. *Пусть последовательность a_n задается линейным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными $c_1, \ldots, c_k$:*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n \tag{2.8}$$

и числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ заданы. Тогда производящая функция $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ рациональна, $A(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, причем степень многочлена Q равна k, а степень многочлена P не превосходит $k-1$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет, по существу, рассуждение для чисел Фибоначчи. Умножив производя-

щую функцию $A(s)$ на $c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_k s^k$, получим

$$
\begin{aligned}
(c_1 s + \ldots + c_k s^k)A(s) = \\
= c_1 a_0 s + c_1 a_1 s^2 + c_1 a_2 s^3 + \ldots + c_1 a_{k-1} s^k + \ldots + \\
+ c_2 a_0 s^2 + c_2 a_1 s^3 + \ldots + c_2 a_{k-2} s^k + \ldots + \\
+ c_3 a_0 s^3 + \ldots + c_3 a_{k-3} s^k + \ldots + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ c_k a_0 s^k \quad + \ldots = \\
= P(s) + A(s),
\end{aligned}
$$

где степень многочлена P не превосходит $k-1$. Действительно, коэффициент при s^{n+k} в правой части первого равенства совпадает с правой частью выражения (2.8). Отсюда непосредственно получаем утверждение теоремы. □

Заметим, что доказательство теоремы 2.1 дало нам более сильное утверждение: мы доказали, что многочлен Q имеет вид

$$Q(s) = 1 - c_1 s - c_2 s^2 - \ldots - c_k s^k.$$

Вывод векторной производящей функции для последовательности Фибоначчи также непосредственно переносится на случай произвольной рекуррентной последовательности. В общем случае двумерный вектор следует заменить k-мерным вектором

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

а матрица $\mathcal{A}$ перехода к следующему k-мерному вектору, соответствующая рекуррентному соотношению, будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \ldots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Таким образом, мы получаем векторную производящую функцию

$$\bar{A}(s) = (I - s\mathcal{A})^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{A}$, вообще говоря, не приводится к диагональному виду линейным преобразованием. Это можно сделать, лишь если ее собственные числа (т. е. корни многочлена Q) попарно различны. Однако в общем случае ее можно привести к жордановой нормальной форме, степени которой также несложно вычислить.

Оказывается, что рациональные производящие функции в точности совпадают с производящими функциями для последовательностей, задаваемых линейными рекуррентными соотношениями. Точнее, справедлива следующая обратная теорема.

Теорема 2.2. *Если производящая функция* $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ *рациональна,* $A(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, *где многочлены* P *и* Q *взаимно просты, то начиная с некоторого номера* n *последовательность* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *задается линейным рекуррентным соотношением*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n,$$

где k *— степень многочлена* Q, *а* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *— некоторые константы.*

Доказательство читателю предлагается провести самостоятельно.

2.4. Произведение Адамара рациональных производящих функций

Одно из наиболее привлекательных свойств рациональных производящих функций — их замкнутость относительно произведения Адамара.

Определение 2.3. *Произведением Адамара* производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots$$

называется производящая функция

$$A \circ B(s) = a_0 b_0 + a_1 b_1 s + a_2 b_2 s^2 + \ldots$$

Таким образом, произведение Адамара двух последовательностей — это последовательность, состоящая из почленных произведений соответственных членов этих последовательностей. Необходимость в

производящей функции для произведения Адамара уже встречалась: в задаче о числе счастливых билетов нам понадобилось вычислить сумму квадратов коэффициентов производящего многочлена A_3. Эта необходимость возникает при перечислении пар объектов одинакового порядка: если число объектов первого типа равно a_n, а число объектов второго типа b_n, то число пар объектов, составленных из элементов первого и второго типа, равно $a_n b_n$.

Теорема 2.4. *Произведение Адамара двух рациональных производящих функций рационально.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится новая характеризация рациональных производящих функций.

Лемма 2.5. *Производящая функция для последовательности a_0, a_1, a_2, ... рациональна тогда и только тогда, когда существуют такие числа $q_1, \ldots, q_l$ и такие многочлены $p_1(n), \ldots, p_l(n)$, что начиная с некоторого номера n*

$$a_n = p_1(n)q_1^n + \ldots + p_l(n)q_l^n. \tag{2.10}$$

Выражение в правой части равенства (2.10) называется *квазимногочленом* от переменной n.

Доказательство. Заметим прежде всего, что производящая функция $(1-qs)^{-k}$ имеет вид

$$\begin{aligned}(1-qs)^{-k} &= 1 - \binom{-k}{1}qs + \binom{-k}{2}q^2s^2 - \binom{-k}{3}q^3s^3 + \ldots = \\ &= 1 + \binom{k}{1}qs + \binom{k+1}{2}q^2s^2 + \binom{k+2}{3}q^3s^3 + \ldots = \\ &= 1 + \binom{k}{k-1}qs + \binom{k+1}{k-1}q^2s^2 + \binom{k+2}{k-1}q^3s^3 + \ldots\end{aligned}$$

Коэффициент при s^n в этой производящей функции равен

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{(k-1)!}q^n = P_{k-1}(n)q^n, \tag{2.11}$$

где $P_{k-1}(n)$ — многочлен от n степени $k-1$. Всякая рациональная функция от переменной s представляется в виде линейной комбинации многочлена и элементарных дробей вида $(1-q_is)^{-k_i}$, поэтому коэффициенты соответствующей производящей функции являются квазимногочленами.

Наоборот, предположим, что коэффициенты производящей функции, начиная с некоторого номера, представляются в виде квазимногочлена. Покажем, что в случае квазимногочлена $p(n)q^n$ соответствующая производящая функция рациональна. Пусть степень многочлена p равна $k-1$. Многочлены $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, определенные равенством (2.11), образуют базис в пространстве многочленов степени не выше $k-1$. Действительно, любая последовательность многочленов степеней $0, 1, \ldots, k-1$ образует базис в этом пространстве. Поэтому многочлен p представляется в виде линейной комбинации многочленов P_i и соответствующая производящая функция есть просто линейная комбинация функций $(1-qs)^{-j}$, $j=0, 1, \ldots, k-1$. Для произвольного квазимногочлена мы получаем линейную комбинацию функций такого вида при разных q_i. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.4. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что произведение квазимногочленов является квазимногочленом. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (2.10). □

2.5. Числа Каталана

Порядок вычислений в арифметических выражениях задается расстановкой скобок, например,

$$(3-1)\cdot(4+(15-9)\cdot(2+6)).$$

Если стереть все элементы выражения, за исключением скобок, то оставшиеся скобки образуют *правильную скобочную структуру*:

$$()(()()).$$

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

$$\begin{array}{ccccc} & & () & & \\ & ()() & & (()) & \\ ()()() & ()(()) & (())() & (()()) & ((())) \end{array}$$

Определение 2.6. *Числом Каталана* c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Удобно полагать $c_0=1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;

2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из $n+1$ пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру: $(\ldots)\ldots$, где каждое многоточие обозначает некоторую правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней структуре равно k, то во внешней структуре $n-k$ пар скобок. Наоборот, по каждой паре скобочных структур из k и $n-k$ пар скобок можно восстановить структуру из $n+1$ пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.

Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана. На этот раз соотношение оказывается нелинейным:

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0. \tag{2.12}$$

Например, при $n=4$

$$c_5 = c_0 c_4 + c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_3 c_1 + c_4 c_0 = 1\cdot 14 + 2\cdot 5 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 + 14\cdot 1 = 42.$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана

$$\mathrm{Cat}(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots = 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \ldots$$

Возведя ее в квадрат и умножив результат на s, получим

$$s\,\mathrm{Cat}^2(s) = c_0^2 s + (c_0c_1 + c_1c_0)s^2 + (c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0)s^2 + \ldots = \\ = s + 2s^2 + 5s^3 + 14s^4 + \ldots = \mathrm{Cat}(s) - 1,$$

что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$s\,\mathrm{Cat}^2(s) - \mathrm{Cat}(s) + 1 = 0, \tag{2.13}$$

откуда

$$\mathrm{Cat}(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4s}}{2s}. \tag{2.14}$$

(Второй корень уравнения отбрасывается, так как $(1+\sqrt{1-4s})/2s = 1/s + \ldots$ содержит отрицательные степени s.)

Вид производящей функции (2.14) позволяет найти явную формулу для чисел Каталана. Согласно биному Ньютона

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!},$$

откуда, умножая числитель и знаменатель на $n!$ и сокращая на 2^{n+1}, получаем

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2.15}$$

Последняя формула дает и более простое (хотя и с переменными коэффициентами) рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n. \tag{2.16}$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Литература, им посвященная, необозрима. Известно несколько десятков их различных определений. Приведем лишь две часто встречающиеся их реализации.

Рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до $n+1$. *Диагональной триангуляцией* назовем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Всякая такая триангуляция содержит $n-1$ диагональ. На рис. 2.1 приведены все различные диагональные триангуляции четырехугольника и пятиугольника.

Пусть t_n — число триангуляций $(n+2)$-угольника при $n \geqslant 1$; положим $t_0 = 1$. Рассмотрим произвольную триангуляцию и выделим

треугольник, примыкающий к стороне 01 (см. рис. 2.2). Пусть k — номер третьей вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает $(n+2)$-угольник на k-угольник и $(n-k+3)$-угольник, каждый из которых триангулирован диагоналями. Перенумеруем вершины этих многоугольников против часовой стрелки так, чтобы нумерация вершин в каждом из них начиналась с 0 (см. рис. 2.3). В результате получим пару триангуляций k-угольника и $(n-k+3)$-угольника.

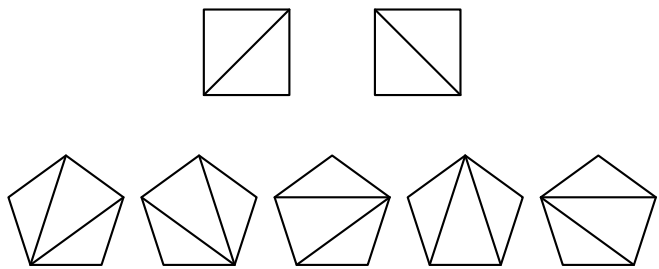


Рис. 2.1. Диагональные триангуляции 4- и 5-угольника

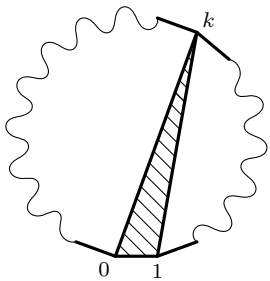


Рис. 2.2. Треугольник, примыкающий к стороне 01

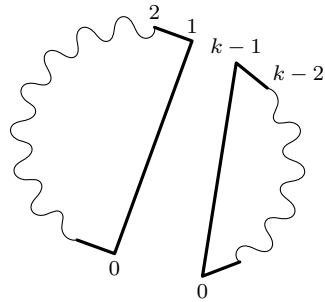


Рис. 2.3. Перенумерация вершин многоугольников разбиения

Наоборот, каждая пара триангуляций k-угольника и $(n-k+3)$-угольника определяет триангуляцию исходного многоугольника. Поэтому

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \ldots + t_n t_0,$$

и, поскольку $t_0 = 1$, последовательность чисел t_n совпадает с последовательностью Каталана.

Описанная выше процедура сопоставления триангуляции $(n+2)$-угольника пары триангуляций k-угольника и $(n-k+3)$-угольника позволяет установить и взаимно однозначное соответствие между триангуляциями $(n+2)$-угольника и скобочными структурами из n пар скобок. Действительно, предположим, что для всех меньших значений n такое соответствие установлено. Каждой триангуляции $(n+2)$-угольника мы сопоставили пару триангуляций многоугольников с меньшим числом сторон. По предположению, этой паре триангуляций соответствует пара скобочных структур. Заключим первую из этих скобочных структур в скобки и припишем к ней вторую — получим новую скобочную структуру, соответствующую исходной триангуляции всего $(n+2)$-угольника.

Еще одна важная реализация чисел Каталана связана с путями Дика на плоскости. Рассмотрим целочисленную решетку в положительном квадранте. *Путем Дика* называется непрерывная ломаная в верхней полуплоскости, составленная из векторов $(1,\,1)$ и $(1,\,-1)$, начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс (см. рис. 2.4).

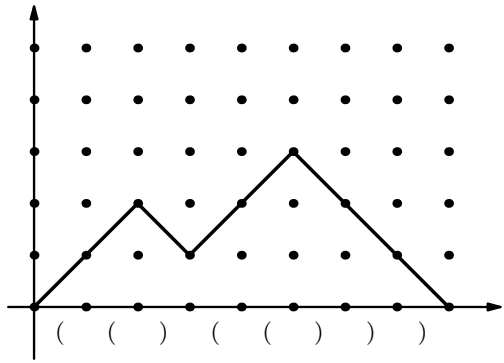


Рис. 2.4. Путь Дика и соответствующая ему скобочная структура

Совершенно ясно, как устанавливается соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами: нужно сопоставить вектору $(1,\,1)$ левую скобку, а вектору $(1,\,-1)$ — правую скобку (рис. 2.4). Тогда условие, что путь лежит в верхней полуплоскости и заканчивается на оси абсцисс, и есть в точности условие правильности скобочной структуры. Поэтому

Число путей Дика из $2n$ звеньев равно n-му числу Каталана c_n.

2.6. Задачи

2.1. Докажите, что если последовательность a_n допускает представление в виде (2.10) и все q_i различны, то такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

2.2. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что функция $\ln \dfrac{1}{1-s} = s + \dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s^3}{3} + \ldots$ не рациональна.

2.3. Рациональны ли производящие функции для последовательностей:

а) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$;

б) $2, -6, 12, \ldots, (-1)^k(k+1)(k+2), \ldots$;

в) $1, -4, 9, -16, \ldots, (-1)^k(k+1)^2, \ldots$;

г) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{k^2}, \ldots$;

д) f_n^2, где f_n — числа Фибоначчи?

Найдите соответствующие производящие функции в тех случаях, когда они рациональны.

2.4. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ — производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Найдите производящие функции для последовательностей:

а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$;

б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$;

в) $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, \ldots$;

г) $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$

2.5. Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите для них тождества:

а) $f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

б) $f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}$;

в) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$;

г) $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

2.6. Докажите, что в жордановой нормальной форме матрицы из уравнения (2.9) каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка, размер которой равен кратности этого собственного числа как корня характеристического многочлена.

2.7. Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:

а) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \;\; a_0 = a_1 = 1$;

б) $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, \;\; a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$;

в) $a_{n+3} = \dfrac{3}{2}a_{n+2} - \dfrac{1}{2}a_n, \;\; a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

2.8. Найдите произведения Адамара функций от s

$$(1-qs)^{-1}\circ(1-rs)^{-1},\ \ (1-qs)^{-1}\circ(1-qs)^{-1},\quad (1-qs)^{-2}\circ(1-rs)^{-1},$$
$$(1-qs)^{-2}\circ(1-qs)^{-2},\quad (1-qs)^{-3}\circ(1-rs)^{-1}.$$

2.9. *Пути Моцкина* определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы (1, 0) (см. рис. 2.5). Число путей Моцкина из n векторов называется n-м *числом Моцкина* и обозначается через m_n. Вот начало последовательности Моцкина: $m_0=1$, $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=3$. Вычислите несколько следующих членов этой последовательности. Найдите для нее рекуррентное соотношение и производящую функцию.

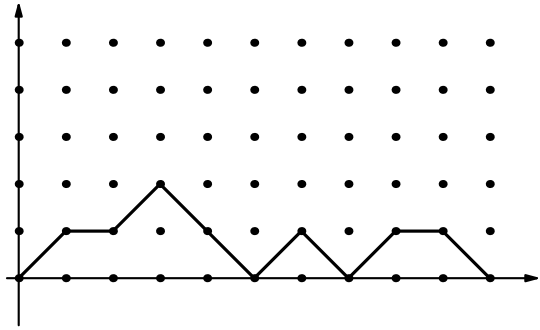


Рис. 2.5. Путь Моцкина

2.10. Придумайте алгоритмы последовательного вывода а) правильных скобочных структур; б) путей Моцкина. Постарайтесь, чтобы алгоритмы были как можно более эффективны.

2.11. Рассмотрим множество путей на прямой, состоящих из шагов длины 1 вправо или влево. Найдите производящую функцию для числа таких путей из n шагов, начинающихся в 0 и а) оканчивающихся в 0; б) оканчивающихся в 0 и не заходящих в отрицательную полупрямую; в) оканчивающихся в фиксированной точке $N>0$; г) оканчивающихся в фиксированной точке $N>0$ и не заходящих в отрицательную полупрямую.

2.12. Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов (1, 0), (−1, 0), (0, 1). Найдите производящую функцию для числа таких путей длины n, начинающихся в 0 и несамопересекающихся (т. е. векторы (1, 0) и (−1, 0) не могут идти непосредственно друг за другом).

2.13. Двое играют в такую игру. Один задумывает целое число от 1 до 144, а второй пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые первый (честно) отвечает «да» или «нет». В случае ответа «да» второй платит 1 рубль, в случае ответа «нет» — 2 рубля. Как должен играть второй игрок, чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным? А как он должен себя вести, если вместо 144 стоит другое число?

2.14. (Задача Гиппарха.) Следующая цитата — из «Застольных бесед» Плутарха[1]: «Хризипп говорит, что число комбинаций, которые можно получить из десяти простых предложений, превосходит один миллион. На это возразил Гиппарх, указав, что одно утвердительное предложение охватывает включенных в него сто три тысячи сорок девять, а отрицательное — триста десять тысяч девятьсот пятьдесят два».

Проверьте утверждение Гиппарха, считая что 1) утвердительное сложное предложение строится из n простых предложений (обозначаемых ниже латинскими буквами) путем заключения их всеми возможными способами в (не более чем) $n-2$ пар скобок. Например, из трех простых предложений можно составить 3 сложных:

$$a,\, b,\, c\,; \quad (a,\, b),\, c\,; \quad a,\, (b,\, c),$$

а из четырех простых предложений — 11 сложных:

$$\begin{gathered} a,\, b,\, c,\, d\,; \quad a,\, (b,\, c,\, d)\,; \quad (a,\, b,\, c),\, d\,; \quad a,\, b,\, (c,\, d); \\ a,\, (b,\, c),\, d\,; \quad (a,\, b),\, c,\, d\,; \quad a,\, (b,\, (c,\, d))\,; \quad a,\, ((b,\, c),\, d)\,; \\ (a,\, (b,\, c)),\, d\,; \quad ((a,\, b),\, c),\, d\,; \quad (a,\, b),\, (c,\, d)\,; \end{gathered}$$

2) отрицательное сложное предложение строится из n простых предложений, предваряемых отрицанием, путем заключения их всеми возможными способами в (не более чем) $n-1$ пар скобок. Например, из трех простых предложений можно составить 7 сложных отрицательных:

$$\begin{gathered} \mathrm{no}\, a,\, b,\, c; \quad (\mathrm{no}\, a,\, b),\, c; \quad \mathrm{no}\, a,\, (b,\, c); \quad \mathrm{no}(a,\, b),\, c; \\ \mathrm{no}(a,\, b,\, c); \quad \mathrm{no}((a,\, b),\, c); \quad \mathrm{no}(a,\, (b,\, c)). \end{gathered}$$

(Во втором случае ответ несколько отличается от предложенного Гиппархом.)

[1] Плутарх. Застольные беседы / Перев. Я. М. Боровского. М., 1987. VIII.9, с. 157; в переводе имеется опечатка: «триста девять тысяч. . . » вместо «триста десять. . . ».

Выведите производящие функции для соответствующих последовательностей.

2.15. (Фибоначчиева система счисления.) Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots$, где f_n — числа Фибоначчи, а каждое из чисел a_i равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два идущих подряд элемента последовательности a_i не могут равняться единице. (Обратите внимание на то, что число $f_0 = 1$ не используется, так что последовательность Фибоначчи начинается так: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) Придумайте алгоритмы перевода чисел из фибоначчиевой системы счисления в позиционную и обратно, а также алгоритмы сложения и умножения чисел в этой системе счисления.

2.16. Пусть

$$A(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad B(s) = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

— рациональные производящие функции, заданные несократимыми дробями, и

$$A \circ B(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

— их произведение Адамара, представленное в виде несократимой дроби. Что можно сказать про многочлен Q, если многочлены Q_1 и Q_2 известны?

Глава 3

Формальные грамматики с однозначным выводом. Теорема Лагранжа

3.1. Язык Дика

Как мы знаем, правильные скобочные структуры перечисляются числами Каталана. Выпишем все правильные скобочные структуры до порядка 4:

порядка 1:	( ) $a\ b$	порядка 2:	(( )) $a\ a\ b\ b$ ( ) ( ) $a\ b\ a\ b$
порядка 3:	((( ))) $a\ a\ a\ b\ b\ b$ (( ) ( )) $a\ a\ b\ a\ b\ b$ (( )) ( ) $a\ a\ b\ b\ a\ b$ ( ) (( )) $a\ b\ a\ a\ b\ b$ ( ) ( ) ( ) $a\ b\ a\ b\ a\ b$		
порядка 4:	(((( )))) $a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b$ (( ) ( )) ( ) $a\ a\ b\ a\ b\ b\ a\ b$ ( ) ( ) (( )) $a\ b\ a\ b\ a\ a\ b\ b$ (( ) ( ) ( )) $a\ a\ b\ a\ b\ a\ b\ b$	((( ))) ( ) $a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ a\ b$ ( ) (( )) ( ) $a\ b\ a\ a\ b\ b\ a\ b$ (( ) (( ))) $a\ a\ b\ a\ a\ b\ b\ b$ ( ) ((( ))) $a\ b\ a\ a\ a\ b\ b\ b$	( ) (( ) ( )) $a\ b\ a\ a\ b\ a\ b\ b$ ((( )) ( )) $a\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b$ (( )) ( ) ( ) $a\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b$ ( ) ( ) ( ) ( ) $a\ b\ a\ b\ a\ b\ a\ b$	((( ) ( ))) $a\ a\ a\ b\ a\ b\ b\ b$ (( )) (( )) $a\ a\ b\ b\ a\ a\ b\ b$ ( ) ( ) ( ) ( ) $a\ b\ a\ b\ a\ b\ a\ b$

Если обозначить левую скобку буквой a, а правую — буквой b, то можно переписать правильные скобочные структуры в виде «слов»

в алфавите $\{a, b\}$. В приведенной выше таблице под каждой скобочной структурой записано соответствующее ей слово.

При такой записи мы получаем не все слова в алфавите $\{a, b\}$, а только некоторые. Например, слова a, b, aa, ba не соответствуют никаким правильным скобочным структурам.

Определение 3.1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — произвольный конечный набор различных букв. *Словом* в алфавите A называется произвольная конечная последовательность букв $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, где $\alpha_i \in \in A$, $i = 1, \ldots, m$. Число m называется *длиной слова*. *Языком* над алфавитом A называется произвольное (конечное или бесконечное) множество слов в алфавите A.

Пустое слово λ имеет длину 0 и может входить или не входить в язык.

Пример 3.2. Язык $\mathcal{F}$ состоит из слов в алфавите $\{a, b\}$, не содержащих двух букв b подряд: λ, a, b, aa, ab, ba, aaa, aab, aba, baa, bab, $aaaa$, $\ldots$

Множество правильных скобочных структур вместе с пустой структурой образует язык над алфавитом $\{a, b\}$. Этот язык называется *языком Дика*. Конечно, тот же язык мы могли бы рассматривать и над алфавитом $\{(\ ,\ )\}$; просто символы a, b в нашем восприятии более соответствуют термину «буква».

Определение 3.3. *Производящей функцией* языка L называется производящая функция

$$L(s) = l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \ldots,$$

где l_k есть число слов длины k в языке L.

3.2. Правила вывода в языке Дика

Выписывание всех скобочных структур данной длины — трудоемкий процесс. Чтобы не пропустить ни одной структуры и не повторить никакую структуру дважды, этот процесс надо упорядочить. Один из способов добиться упорядочения состоит в том, чтобы рассмотреть два *правила вывода в языке Дика*:

$$\begin{array}{ll} 1) & r \to \lambda; \\ 2) & r \to arbr. \end{array} \tag{3.1}$$

Здесь r — буква, не входящая в алфавит $\{a, b\}$. Вместо нее мы могли бы выбрать любую букву, отличную от a и b.

Стрелка в правилах вывода (3.1) заменяет фразу:

если в слове есть буква r, то эту букву можно заменить на слово, стоящее справа от стрелки.

Покажем, как работают правила вывода: выведем по этим правилам заданную скобочную структуру.

Пусть нам нужно вывести слово $aabaabbb$. Вот, как выглядит вывод:

$$\underline{r} \xrightarrow{2)} arb\underline{r} \xrightarrow{1)} a\underline{r}b \xrightarrow{2)} aa\underline{r}brb \xrightarrow{1)} aab\underline{r}b \xrightarrow{2)} aabarb\underline{r}b \xrightarrow{1)}$$
$$\xrightarrow{1)} aaba\underline{r}bb \xrightarrow{2)} aabaa\underline{r}b\underline{r}bb \xrightarrow{1),1)} aabaabbb.$$

Над каждой стрелкой в процессе вывода написан номер примененного правила. Буква r, к которой применялось правило, подчеркнута.

Правила вывода в языке Дика можно понимать следующим образом:

Всякое слово в языке Дика есть либо

1) *пустое слово*, либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

Ясно, что для каждого слова языка Дика такое представление единственно.

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели выпишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$\mathcal{D}(a,\, b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \ldots \tag{3.2}$$

Теорема 3.4. *Ряд* (3.2) *удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{D}(a,\, b) = \lambda + a\mathcal{D}(a,\, b)b\mathcal{D}(a,\, b). \tag{3.3}$$

Доказательство. Действительно, в левой части равенства (3.3) записана сумма всех слов языка Дика. Равенство означает справедливость утверждения

Всякое слово в языке Дика есть либо

1) *пустое слово*, либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

При этом такое представление единственно. Теорема доказана. □

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a = s$, $b = s$, $\lambda = s^0 = 1$. Уравнение (3.3) примет вид

$$\mathcal{D}(s,\, s) = 1 + s^2\mathcal{D}(s,\, s).$$

Отсюда, обозначив $\mathcal{D}(s,\, s)$ через $d(s)$, получим

$$d(s) = 1 + s^2 d^2(s). \tag{3.4}$$

Решение

$$d(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2}}{2s^2}$$

этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана (2.14). Необходимость подстановки переменной s^2 вместо s объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из n пар скобок, равна $2n$, тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу *пар* скобок.

3.3. Формальные грамматики с однозначным выводом

Приведем обобщение рассуждения из предыдущего раздела.

Определение 3.5. Слово $w = \beta_1 \ldots \beta_m$ языка L называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово $\beta_i\beta_{i+1} \ldots \ldots \beta_{i+l}$, $1 \leqslant i$, $i + l \leqslant m$, $l \geqslant 0$, отличное от самого слова w, не принадлежит языку L.

В частности, пустое слово в любом языке неразложимо. Предположим, что язык L обладает следующими свойствами:

1) пустое слово входит в язык L;

2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;

3) если между любыми двумя буквами любого слова языка L вставить слово языка L, то получится слово языка L;

4) если из любого слова языка L выкинуть подслово, входящее в язык L, то получится слово языка L.

Обозначим через $n(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \ldots$ производящую функцию для числа неразложимых слов языка L, через $l(s) = l_0 + l_1 s + + l_2 s^2 + \ldots$ — производящую функцию для языка L.

Теорема 3.6. *Производящая функция для языка L, удовлетворяющего свойствам 1)—4), и производящая функция для подъязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(s) = n(sl(s)). \tag{3.5}$$

Доказательство. Каждому неразложимому слову $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}$ в языке L сопоставим правило вывода

$$r \to \alpha_{i_1} r \alpha_{i_2} r \dots \alpha_{i_m} r.$$

Ясно, что каждое слово языка допускает вывод по этим правилам. Такой вывод однозначен. Действительно, пусть $\beta_1 \dots \beta_k$ —произвольное слово языка L. Если оно неразложимо, то оно представляется в виде правой части правила вывода

$$r \to \beta_1 r \beta_2 r \dots \beta_k r,$$

где каждое вхождение символа r следует заменить на пустое слово. Из определения неразложимого слова вытекает, что такое представление единственно.

Предположим теперь, что есть разложимые слова, допускающие различное представление. Рассмотрим самое короткое такое слово w. В нем содержится неразложимое подслово. Выберем из всех неразложимых подслов слова w самое правое (это возможно, так как неразложимые подслова не могут пересекаться) и выкинем его из слова w. Получим новое слово w'. Это слово имеет те же самые представления в виде правых частей правил вывода, что и слово w. Поэтому w' — более короткое слово, допускающее несколько различных представлений. Полученное противоречие доказывает единственность представления.

Таким образом, некоммутативная производящая функция для языка L удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \lambda + \alpha_{11}\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)\alpha_{12}\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \dots + \dots$$

Делая подстановку $\lambda = 1$, $a_i = t$ и учитывая, что $l(t) = \mathcal{L}(t, t, \dots, t)$, получаем заключение теоремы. □

Пример 3.7. Для языка Дика $n(t) = 1 + t^2$. Неразложимые слова — это λ и ab. Отсюда немедленно получаем уравнение (3.4) на производящую функцию для языка Дика.

Одного символа зачастую бывает недостаточно для построения грамматики. Дадим формальное определение грамматики.

Определение 3.8. Пусть $R = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — конечное множество символов, не входящих в алфавит A. *Правилом вывода* называется запись вида

$$r_i \to w,$$

где $r_i \in R$, а w — слово в алфавите $A \sqcup R$. Множество Γ (конечное или бесконечное) правил вывода

$$\begin{array}{lll} r_1 \to w_{11}, & r_1 \to w_{12}, & \ldots, \\ r_l \to w_{l1}, & r_l \to w_{l2}, & \ldots \end{array}$$

называется (*контекстно свободной*) *грамматикой* (над алфавитом A). Слово в алфавите A *порождается* символом r_i, если оно может быть получено цепочкой подстановок, задаваемых грамматикой, из символа r_i. Язык L_i *порождается* символом r_i, если все слова языка L_i и только они порождаются символом r_i. Грамматика Γ является *грамматикой с однозначным выводом*, если каждое слово, выводимое из символа r_i, единственным образом представляется в виде правой части одного из правил вывода $r_i \to w_{ik}$.

В связи с задачами перечисления наибольший интерес для нас представляют формальные грамматики с однозначным выводом. Такая грамматика была построена для языка Дика. Приведем еще один подобный пример.

Пример 3.9. Рассмотрим язык $\mathcal{F}$ из примера 3.2. Вот возможная грамматика для этого языка:

$$r_1 \to \lambda, \quad r_1 \to b, \quad r_1 \to r_2 b, \quad r_1 \to r_2, \quad r_2 \to r_1 a.$$

Язык $\mathcal{F}$ выводится из символа r_1. Из символа r_2 выводится подъязык языка $\mathcal{F}$, состоящий из слов, кончающихся на a.

Приведенная грамматика читается так:

1) всякое слово языка $\mathcal{F}$ есть либо пустое слово, либо слово b, либо слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a, к которому приписана буква b, либо слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a;

2) всякое слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a, есть некоторое слово языка $\mathcal{F}$, к которому приписана буква a.

Теорема 3.10. *Пусть Γ — грамматика с однозначным выводом. Обозначим через $r_i(s)$ производящую функцию для числа слов в языке L_i, выводимого из символа r_i. Тогда производящие функции r_i удовлетворяют системе уравнений*

$$r_i(s) = \sum_j s^{\nu_{ij}} \prod_k r_k^{\eta_{kj}}(s).$$

В частности, если число правил вывода конечно, то функции r_i удовлетворяют системе полиномиальных уравнений и поэтому являются *алгебраическими функциями.*

Доказательство. Поступим, как и в ситуации с одним порождающим символом, — введем некоммутативные производящие степенные ряды для каждого из языков L_i. Ввиду однозначности представления каждого слова в виде правой части правила вывода получаем систему уравнений на некоммутативные ряды. Делая подстановку $\lambda = s^0 = 1$, $a_i = s$ при $i = 1, \ldots, m$, получаем систему уравнений на производящие функции для числа слов. Теорема доказана. □

3.4. Уравнение Лагранжа и теорема Лагранжа

Посмотрим повнимательнее на равенство (3.5). Это функциональное уравнение, связывающее между собой производящие функции для числа слов в языке и числа неразложимых слов в нем. Нам бы хотелось уметь его решать, если одна из функций задана. Оказывается, это всегда возможно.

Чтобы привести наше уравнение к классическому виду, домножим обе его части на s и положим $sl(s) = \tilde{l}(s)$. Тогда уравнение (3.5) примет вид

$$\tilde{l}(s) = sn(\tilde{l}(s)). \tag{3.6}$$

Последнее уравнение называется *уравнением Лагранжа*, и для него справедлива следующая теорема.

Теорема 3.11 (Лагранж). *Пусть в уравнении* (3.6) *задана одна из производящих функций* $\tilde{l}(s)$ ($\tilde{l}_0 = 0$, $\tilde{l}_1 \neq 0$) *или* $n(t)$ ($n_0 \neq 0$). *Тогда вторая производящая функция однозначно восстанавливается по ней.*

Доказательство. Уравнение (3.6) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}\tilde{l}_1 s + \tilde{l}_2 s^2 + \ldots = n_0 s + n_1 s\Big(\tilde{l}_1 s + \tilde{l}_2 s^2 + \quad \tilde{l}_3 s^3 + \ldots\Big) + \\ + n_2 s\Big(\qquad \tilde{l}_1^2 s^2 + 2\tilde{l}_1\tilde{l}_2 s^3 + \ldots\Big) + \\ + n_3 s\Big(\qquad\qquad \tilde{l}_1^3 s^3 + \ldots\Big) + \ldots\end{aligned}$$

Докажем сначала, что если функция $\tilde{l}(s)$ задана, то $n(t)$ однозначно восстанавливается по ней. Доказательство проведем по индукции,

приравнивая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях.

Коэффициент n_0 определяется равенством $n_0 = \tilde{l}_1$. Предположим теперь, что коэффициенты $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ уже определены. Тогда коэффициент n_k определяется из уравнения, составленного приравниванием коэффициентов при s^{k+1}:

$$n_k \tilde{l}_1^k + n_{k-1}\lambda_{k-1} + \ldots + n_1\lambda_1 = \tilde{l}_k. \tag{3.7}$$

Здесь через λ_i, $i = 2, \ldots, k-1$, обозначены коэффициенты при s^k в производящих функциях $\tilde{l}^i(s)$. Уравнение (3.7) — линейное уравнение относительно n_k. Коэффициент при n_k в нем равен $\tilde{l}_1^k$ и, по условию теоремы, отличен от нуля. Поэтому n_k однозначно определяется из уравнения (3.7).

С другой стороны, если задана функция $n(t)$, то мы должны положить $\tilde{l}_1 = n_0$. Коэффициенты $\tilde{l}_k$ определяются теперь равенством (3.7), так как все коэффициенты λ_i являются многочленами от $\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_{k-1}$. Теорема доказана. □

Замечание 3.12. Если коэффициенты функции n — целые неотрицательные числа, то и коэффициенты функции $\tilde{l}$ будут целыми и неотрицательными. Если коэффициенты функции $\tilde{l}$ целые и неотрицательные, причем $\tilde{l}_1 = 1$, то и коэффициенты функции n оказываются целыми. Однако при этом среди них могут оказаться и отрицательные числа.

3.5. Задачи

3.1. Докажите, что грамматика из примера 3.9 действительно описывает язык $\mathcal{F}$ из примера 3.2 и что вывод в ней однозначен. Воспользовавшись этой грамматикой, найдите производящую функцию для языка $\mathcal{F}$.

3.2. Придумайте для языка $\mathcal{F}$ порождающую грамматику с одним порождающим символом и однозначным выводом.

3.3. Покажите, что в грамматике

$$r \to \lambda; \quad r \to ra; \quad r \to br; \quad r \to arb$$

вывод не однозначен.

3.4. Напишите правила вывода для языка правильных скобочных структур из двух пар скобок (круглых и квадратных) и выведите производящую функцию для него. Этот язык называется *языком Дика*

второго порядка. Обобщите результат на языки Дика произвольного порядка.

3.5. Задайте с помощью формальных грамматик языки систем путей из задач 2.11, 2.12; выведите отсюда соответствующие производящие функции.

3.6. *Языком Моцкина* называется язык в алфавите $\{a, b, c\}$, состоящий из таких слов, что зачеркивание всех букв c в них дает слово из языка Дика. Слова в языке Моцкина находятся во взаимно однозначном соответствии с путями Моцкина из задачи 2.9. Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию для этого языка.

3.7. Постройте грамматику для языка натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления.

3.8. Постройте грамматику для языка правильных арифметических выражений в двоичной системе счисления в алфавите: $\{(,), +, 1, 0\}$.

3.9. Постройте грамматики для языков

а) $L_1 = \{a^{3i}b^i \mid i \geqslant 0\}$;

б) $L_2 = \{a^i b^j \mid i \geqslant j \geqslant 0\}$;

в) $L_3 = \{w \mid$ число вхождений буквы a в слово w равно числу вхождений буквы b в это слово$\}$;

г) $L_4 = \{w \mid$ число вхождений буквы a в слово w вдвое больше числа вхождений буквы $b\}$;

д) $L_5 = \{$слова в однобуквенном алфавите, длина которых делится на 2 или на 3$\}$;

е) $L_6 =$ множество палиндромов в алфавите из трех букв. (*Палиндромом* называется слово, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

ж) $L_7 = \{$слова в алфавите $\{a, b\}$, содержащие четное число вхождений буквы $a\}$.

Найдите производящие функции для этих языков.

3.10. Докажите справедливость замечания 3.12.

3.11. Найдите производящие функции для языков из двух букв, слова которых не содержат:

а) подслова ba;

б) подслова aba.

Глава 4

Аналитические свойства функций, представляемых степенными рядами, и асимптотика их коэффициентов

4.1. Степенные оценки для асимптотики

При решении перечислительных задач зачастую приходится интересоваться поведением числа элементов множества при росте перечисляющего параметра. Это особенно важно, если мы хотим, например, перечислять объекты на компьютере и пытаемся оценить время работы программы.

Определение 4.1. Функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *имеют одинаковую асимптотику*, или *одинаковый рост*, при $n\to\infty$, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ и он равен 1. Функция f *растет медленнее* функции g, если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ существует и он равен 0. В последнем случае говорят также, что функция g *растет быстрее* функции f.

При вычислении асимптотики некоторые функции мы считаем «образцами», а другие «сводим» к этим образцам. В качестве образцов берутся обычно наиболее простые монотонные функции, поведение которых хорошо изучено. Образцами могут служить:

экспонента a^n при различных значениях основания a;

степенная функция n^α при различных значениях показателя α;

факториал $n!$;

логарифм $\ln n$;

а также произведения и композиции этих функций в различных комбинациях.

Нетрудно расположить функции-образцы в порядке убывания скорости роста:

$$n!; \quad a^n,\ a>1; \quad n^\alpha,\ \alpha>0; \quad \ln n; \quad n^\alpha,\ \alpha<0; \quad a^n,\ 0<a<1.$$

Пример 4.2. Коэффициенты производящей функции $\ln(1-s)^{-1} = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \ldots$ растут, как n^{-1} (в этом случае естественнее было бы говорить «убывают, как n^{-1}»).

В наших дальнейших рассуждениях формальная переменная s заменяется *комплексной* переменной $s \in \mathbb{C}$.

Наиболее простой и чаще всего используемый способ оценки скорости роста коэффициентов производящей функции дает следующая теорема, основанная на признаке Коши сходимости числовых рядов.

Теорема 4.3. *Пусть ряд $F(s)$ сходится в некоторой точке s_0, $|s_0| = r$. Тогда последовательность коэффициентов этого ряда растет медленнее, чем $\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^n$ для любого положительного числа ε.*

Следствие 4.4. *Если ряд сходится на всей плоскости, то последовательность его коэффициентов растет медленнее, чем ε^n, для любого положительного числа ε.*

С каждым степенным рядом (с числовыми — целыми, вещественными или комплексными коэффициентами) можно связать его круг сходимости. *Круг сходимости* ряда — это наибольший открытый (не содержащий границы) круг на комплексной плоскости с центром в начале координат, в каждой точке которого ряд сходится. Круг сходимости может быть пустым, совпадать со всей плоскостью или иметь ненулевой конечный радиус R. В последнем случае справедливо следующее полезное предложение.

Предложение 4.5. *Радиус сходимости ряда $F(s)$ равен модулю ближайшей к началу координат особой точки функции F на комплексной плоскости.*

Не давая строгого определения *особой точки* функции, приведем лучше несколько поясняющих примеров.

Пример 4.6. Рассмотрим производящую функцию для чисел Фибоначчи $\mathrm{Fib}(s) = \frac{1}{1-s-s^2}$ (см. уравнение (2.6)). Ее особенности — это те значения переменной s, для которых знаменатель дроби обращается в нуль, т. е. корни знаменателя $s_1 = (-1+\sqrt{5})/2$, $s_2 = (-1-\sqrt{5})/2$.

Точка s_1 ближе к началу координат, чем точка s_2. Поэтому радиус сходимости ряда Фибоначчи равен

$$R_{\mathrm{Fib}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Из теоремы 4.3 теперь немедленно вытекает, что числа Фибоначчи растут медленнее, чем $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\varepsilon\right)^n$ для любого $\varepsilon > 0$. Формула (2.7) позволяет сделать и более точное утверждение. На самом деле, числа Фибоначчи растут, как $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}$. Действительно, из (2.7) имеем

$$\frac{f_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}} = 1 + c^n,$$

где $|c| = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right| < 1$. Ясно, что c^n стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 4.7. Производящая функция для чисел Каталана имеет вид (см. уравнение (2.14))

$$\mathrm{Cat}(s) = \frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}.$$

Корень знаменателя $s = 0$ не является ее особенностью, так как при $s = 0$ числитель дроби также обращается в нуль. Единственная особенность этой функции отвечает обращению в нуль подкоренного выражения, т. е. значению $s = \frac{1}{4}$. Поэтому числа Каталана растут медленнее, чем $(4+\varepsilon)^n$ для любого $\varepsilon > 0$. Более точные сведения об их асимптотике мы получим ниже.

4.2. Асимптотика гипергеометрических последовательностей

В перечислительных задачах очень часто встречаются последовательности, отношение соседних членов которых равно отношению двух многочленов одинаковой степени. Для геометрической прогрессии, например, это отношение просто равно константе. Если же степени многочленов больше нуля, то соответствующую последовательность называют *гипергеометрической*. Очень хорошее описание асимптотики гипергеометрических последовательностей дает следующая лемма.

Лемма 4.8. *Пусть последовательность a_0, a_1, ... положительных чисел такова, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = A\frac{n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{n^k + \beta_1 n^{k-1} + \ldots + \beta_k} \tag{4.1}$$

для всех достаточно больших n, причем $\alpha_1 \neq \beta_1$. Тогда a_n растет как

$$a_n \sim cA^n n^{\alpha_1 - \beta_1} \tag{4.2}$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

Замечание 4.9. Предположения леммы не позволяют определить величину константы c. Действительно, умножив последовательность a_n на произвольную постоянную $d > 0$, мы получим новую последовательность с тем же отношением последовательных членов, константа c для которой увеличивается в d раз.

Пример 4.10. Для чисел Каталана имеем (см. (2.16))

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4n+2}{n+2} = 4\frac{n+\frac{1}{2}}{n+2}.$$

Поэтому $c_n \sim c \cdot 4^n \cdot n^{-3/2}$ для некоторой постоянной c.

Пример 4.11. Найдем асимптотику коэффициентов для функции $(a-s)^\alpha$, где α вещественно. В ряде случаев эта асимптотика нам уже известна, например, при $\alpha = -1$. Согласно определению функции $(1-s)^\alpha$ имеем

$$\begin{aligned}(a-s)^\alpha &= a^\alpha\left(1-\frac{s}{a}\right)^\alpha = \\ &= a^\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{1!}\frac{s}{a} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{s}{a}\right)^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\left(\frac{s}{a}\right)^3 + \ldots\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Если α — целое неотрицательное число, то ряд обрывается и вопроса об асимптотике не возникает. В противном случае начиная с некоторого номера все коэффициенты ряда (4.3) имеют одинаковый знак. Для определения асимптотики мы можем воспользоваться предыдущей леммой при $a_n = (-1)^n \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!a^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a}\frac{n-\alpha}{n+1} \tag{4.4}$$

Поэтому $a_n \sim c \cdot a^{-n} \cdot n^{-\alpha-1}$. Например, коэффициенты функции $-(1-4s)^{1/2}$ ведут себя как $c \cdot 4^n \cdot n^{-3/2}$, и мы получаем повторный вывод асимптотики для чисел Каталана.

Доказательство леммы. Утверждение леммы эквивалентно тому, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A^n n^{\alpha_1-\beta_1}}.$$

Прологарифмировав, мы приходим к необходимости доказать существование предела

$$\lim_{n\to\infty} (\ln a_n - n\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\ln n). \tag{4.5}$$

Для доказательства существования предела (4.5) применим критерий Коши, т. е. будем доказывать, что рассматриваемая последовательность фундаментальна. Фундаментальность последовательности означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ и всех положительных m

$$|\ln a_{n+m} - \ln a_n - (n+m)\ln A + n\ln A - \\ - (\alpha_1-\beta_1)\ln(n+m) + (\alpha_1-\beta_1)\ln n| < \varepsilon,$$

или

$$|\ln a_{n+m} - \ln a_n - m\ln A - (\alpha_1-\beta_1)\ln(n+m) + (\alpha_1-\beta_1)\ln n| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Перепишем отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = A\frac{1+\alpha_1 n^{-1}+\ldots+\alpha_k n^{-k}}{1+\beta_1 n^{-1}+\ldots+\beta_k n^{-k}} = Af\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.7}$$

где

$$f(x) = \frac{1+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_k x^k}{1+\beta_1 x+\ldots+\beta_k x^k}. \tag{4.8}$$

Прологарифмировав (4.7), получаем

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln A + \ln f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.9}$$

Посмотрим на функцию $\ln f(x)$. Выпишем начальные члены разложения функции f, определенной формулой (4.8), в ряд в точке 0:

$$f(x) = 1 + (\alpha_1-\beta_1)x + \gamma x^2 + \ldots$$

для некоторой константы γ. Это разложение — самый существенный элемент доказательства. Именно коэффициент $\alpha_1-\beta_1$ (отличный от нуля по предположению теоремы) при линейном члене указывает

на присутствие сомножителя $n^{\alpha_1-\beta_1}$ в асимптотике. Для логарифма функции f имеем

$$\ln f(x) = (\alpha_1 - \beta_1)x + \tilde{\gamma}x^2 + \dots$$

Поэтому для некоторой постоянной C при достаточно маленьком x имеем $|\ln f(x) - (\alpha_1 - \beta_1)x| < Cx^2$. В частности, если N достаточно велико, то $\forall n > N$

$$\begin{gathered}
\left|\ln a_{n+1} - \ln a_n - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n}\right| < C\frac{1}{n^2}, \\
\left|\ln a_{n+2} - \ln a_{n+1} - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n+1}\right| < C\frac{1}{(n+1)^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left|\ln a_{n+m} - \ln a_{n+m-1} - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n+m}\right| < C\frac{1}{(n+m)^2}.
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Теперь интересующее нас выражение в левой части неравенства (4.6) можно оценить с помощью системы (4.10) и неравенства треугольника:

$$\begin{aligned}
&|\ln a_{n+m} - \ln a_n - m\ln A - (\alpha_1 - \beta_1)(\ln(n+m) - \ln n)| = \\
&\quad = |\ln a_{n+m} - \ln a_{n+m-1} + \ln a_{n+m-1} - \dots + \ln a_{n+1} - \ln a_n - \\
&\qquad - m\ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n+k} + (\alpha_1 - \beta_1)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n+k} - \\
&\qquad\qquad - (\alpha_1 - \beta_1)(\ln(n+m) - \ln n)| \leqslant \\
&\leqslant \left|\ln a_{n+1} - \ln a_n - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n}\right| + \\
&\qquad + \left|\ln a_{n+2} - \ln a_{n+1} - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n+1}\right| + \\
&\qquad\qquad \dots \\
&\qquad + \left|\ln a_{n+m} - \ln a_{n+m-1} - \ln A - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{1}{n+m}\right| + \\
&\qquad\qquad + |\alpha_1 - \beta_1|\left|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n+k} - \ln(n+m) + \ln n\right| \leqslant \\
&\leqslant C\Big(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m-1)^2}\Big) + \\
&\qquad\qquad + |\alpha_1 - \beta_1|\left|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{n+k} - \ln(n+m) + \ln n\right|.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ сходится, первое слагаемое в правой части последнего неравенства при больших n можно сделать сколь угодно малым. Чтобы оценить второе слагаемое, заметим, что стоящая в нем сумма представляет собой площадь под графиком ступенчатой функции $\dfrac{1}{[x]}$ на отрезке $[n,\, n+m]$, см. рис. 4.1. (Здесь через $[x]$ обозначена

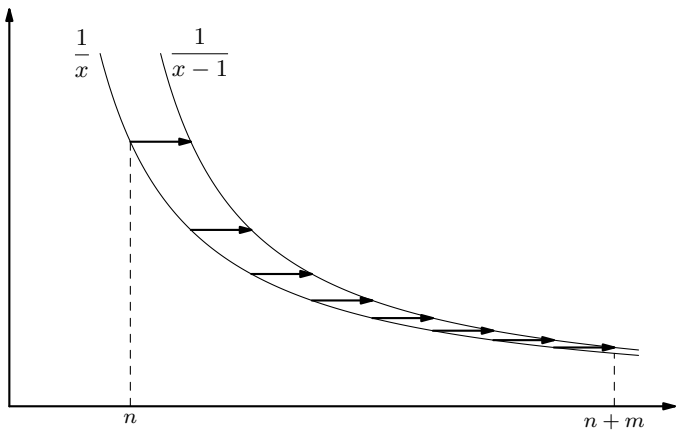


Рис. 4.1. График функции $y = \dfrac{1}{[x]}$ на отрезке $[n,\, n+m]$

целая часть числа x, наибольшее целое число, не превосходящее x.) Эта площадь больше, чем площадь под графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$, но меньше, чем площадь под графиком функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ на этом же отрезке. Площадь под графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ равна $\ln(n+m) - \ln n$, площадь под графиком функции $\dfrac{1}{x-1}$ равна $\ln(n+m-1) - \ln(n-1)$. Таким образом, интересующая нас разность не превосходит

$$|(\ln(n+m-1) - \ln(n-1)) - (-\ln(n+m) + \ln n)| =$$
$$= \left|\ln\Big(1 - \frac{1}{n+m}\Big) - \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\right| < \left|\ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\right| < C\frac{1}{n}.$$

Доказательство леммы завершено. $\square$

4.3. Асимптотика коэффициентов функций, связанных между собой уравнением Лагранжа

Пусть производящие функции $\varphi = \varphi(s)$ и $\psi = \psi(t)$ связаны между собой уравнением Лагранжа (см. (3.6))

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s)). \tag{4.12}$$

Мы хотим выяснить, как связаны между собой их радиусы сходимости. На первый взгляд никакой связи нет. Действительно, мы видели в примере 3.7, что если $\psi(t) = 1 + t^2$ — производящая функция для подъязыка неприводимых слов в языке Дика, то $\varphi(s)$ — производящая функция для самого языка Дика, умноженная на s. При этом если первая функция является многочленом и сходится на всей плоскости, то вторая имеет своим радиусом сходимости $\frac{1}{16}$. Аналогичная картина наблюдается и для любых языков, задаваемых контекстно свободными грамматиками с конечным числом правил вывода и однозначным выводом.

Ситуация, однако, разительно меняется, если число правил вывода в языке (число неразложимых слов) бесконечно.

Теорема 4.12. *Пусть две производящие функции $\varphi = \varphi(s)$ и $\psi = \psi(t)$, $\psi(0) = 1$ с неотрицательными коэффициентами связаны между собой уравнением Лагранжа* (4.12). *Пусть $r > 0$ — радиус сходимости ряда φ, причем числовой ряд $\varphi(r)$ сходится. Тогда радиус сходимости ряда ψ не меньше $\rho = \varphi(r)$. Если числовой ряд $\varphi'(r)$ также сходится, то радиус сходимости ряда ψ равен $\rho = \varphi(r)$.*

Замечание 4.13. Требование неотрицательности коэффициентов рядов естественно, если мы рассматриваем производящие функции для языков. В этом случае естественно также ожидать, что радиус сходимости производящего ряда для числа неприводимых слов больше радиуса сходимости производящего ряда для числа всех слов в языке (последняя последовательность растет быстрее последовательности чисел неприводимых слов).

Доказательство. Докажем, что ряд $\psi(s)$ сходится абсолютно в любой точке s, $|s| = q < \rho$. Поскольку функция φ монотонна и непрерывна на отрезке $[0, r]$, существует точка $p \in [0, r]$, такая что $\varphi(p) = q$. Поэтому для любой частичной суммы $\psi^{[n]}(s) = \psi_0 + \psi_1 s + \ldots + \psi_n s^n$ ряда $\psi(s)$

$$|\psi^{[n]}(s)| \leqslant \psi^{[n]}(q) = \psi^{[n]}(\varphi(p)) \leqslant \varphi(p),$$

где последнее неравенство следует из предыдущего замечания.

Первое утверждение теоремы доказано.

Перепишем теперь уравнение Лагранжа (4.12) в виде

$$\psi(\lambda) = \frac{\lambda}{\varphi^{-1}(\lambda)}.$$

Функции $\psi(\lambda)$ и $\varphi^{-1}(\lambda)$ определены и голоморфны внутри круга радиуса ρ. Теорема будет доказана, если мы покажем что функцию $\varphi^{-1}(\lambda)$ нельзя продолжить голоморфно ни в какую окрестность точки ρ. Предположим, что такое продолжение существует. Тогда

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(\rho) = \lim_{\lambda\to\rho-0}\left(\varphi^{-1}\right)'(\lambda) = \frac{1}{\lim\limits_{t\to r-0}\varphi'(t)}.$$

Последний предел существует и, по условию теоремы, положителен. Поэтому функция φ^{-1} обратима в окрестности точки ρ, что, в свою очередь, противоречит условиям теоремы. $\square$

Отметим, что производящий ряд для чисел Каталана $\mathrm{Cat}(s)$ сходится при $s = r = \frac{1}{4}$, так как числа Каталана имеют асимптотику $4^n \cdot n^{-3/2}$, а ряд $\sum n^{-3/2}$ сходится. С другой стороны, коэффициенты производной имеют асимптотику $4^n \cdot n^{-1/2}$, и поэтому ряд $\mathrm{Cat}'\left(\frac{1}{4}\right)$ расходится. В результате теорема в полном объеме к функции Каталана неприменима, а второе утверждение оказывается неверным.

4.4. Асимптотика коэффициентов производящего ряда и характер особенности на границе круга сходимости

Мы уже видели, что радиус сходимости производящего ряда определяется расположением ближайшей к началу координат особой точки этого ряда. В ситуации, когда радиус сходимости конечен (отличен от нуля и от бесконечности), асимптотика коэффициентов ряда тесно связана с характером особенности на границе круга сходимости.

Простейший вид особенности — это *полюс*, особенность вида $(1 - s/a)^{-k}$ при натуральном k. Как мы уже видели, такие (и только такие) особенности встречаются у рациональных функций. Коэффициенты производящей функции с такой особенностью имеют асимптотику $n^{k-1}a^n$.

Более сложными оказываются алгебраические и алгебро-логарифмические особенности.

Определение 4.14. Особая точка $s = A$ называется *алгебро-логарифмической особой точкой* функции $f(s)$, если в некоторой окрестности точки A функция f может быть представлена в виде суммы конечного числа

функций вида

$$(s-A)^{-\alpha}\ln^k(s-A)\varphi(s), \tag{4.13}$$

где α — комплексное число, k — целое неотрицательное число, а функция φ не имеет особенностей в точке A и $\varphi(A)\neq 0$.

Коэффициенты ряда (4.13) имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} &\mathrm{const}\cdot A^n n^{\Re\alpha-1}\ln^k n \quad &&\text{при } \alpha\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \\ &\mathrm{const}\cdot A^n n^{\alpha-1}\ln^{k-1} n \quad &&\text{при } \alpha= 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \end{aligned} \tag{4.14}$$

В разделе 3.4 было установлено, что формальные грамматики с однозначным выводом естественно приводят к алгебраическим производящим функциям. Произведение Адамара рациональных функций рационально (см. теорему 2.4). Аналогичное утверждение справедливо и для произведения Адамара рациональной и алгебраической функции.

Теорема 4.15. *Если функции $f(s)$ рациональна, а $g(s)$ — алгебраическая, то их произведение Адамара — алгебраическая функция.*

Однако сами по себе алгебраические производящие функции, в отличие от рациональных, не замкнуты относительно произведения Адамара. Например, квадрат Адамара функции $(1-s)^{-1/2}$ (и, вообще, произведение Адамара функций вида $(1-s)^{-\alpha}$) — неалгебраическая функция. Замкнутыми относительно произведения Адамара оказываются функции с алгебро-логарифмическими особенностями. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.16. *Если функции $f(s)$ и $g(s)$ имеют на границе круга сходимости только алгебро-логарифмические особенности, то это же справедливо и для их произведения Адамара. При этом радиус сходимости произведения равен произведению радиусов сходимости функций f и g.*

Еще один важный результат о произведении Адамара был получен Гурвицем.

Теорема 4.17 (Гурвиц). *Если функции f, g являются решениями однородных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, то таким же свойством обладает и их произведение Адамара.*

4.5. Задачи

4.1. Найдите асимптотику чисел Моцкина (см. задачу 2.9).

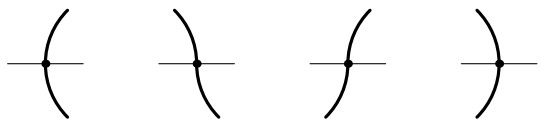
4.2. Найдите асимптотику для числа слов в языке Дика (задача 3.4) а) второго; б) произвольного порядка.

4.3. Найдите асимптотику для числа путей длины k из задач 2.11, 2.12.

4.4. Найдите асимптотику числа слов в языках из задач 3.9, 3.11.

4.5. Рассмотрим на горизонтальной прямой точки $1, 2, \ldots, 2n$ и соедините их попарно набором из n попарно непересекающихся полуокружностей в верхней полуплоскости и n попарно непересекающихся полуокружностей в нижней полуплоскости. Полученная картинка называется *системой меандров* порядка n. Найдите асимптотику для числа систем меандров.

Систему меандров можно закодировать словом длины $2n$ в алфавите из четырех букв $\{a, b, c, d\}$, сопоставив каждой из точек $1, \ldots, 2n$ одну из букв по следующему правилу:



a b c d

(Картинка изображает поведение верхней и нижней полуокружностей, проходящих через выбранную точку.) Найдите асимптотику для числа неразложимых систем меандров (т. е. для числа неразложимых слов в языке систем меандров).

4.6. Докажите *формулу Стирлинга*

$$n! \sim c \cdot n^{n+1/2} e^{-n}.$$

4.7. Докажите, что квадрат Адамара производящей функции для чисел Каталана не является алгебраической функцией.

4.8. Обозначим через a_k число способов уложить прямоугольник $3 \times 2k$ костями домино размером 1×2 так, чтобы они не перекрывались. Например, $a_1 = 3$, $a_2 = 11$. Найдите асимптотику чисел a_k и производящую функцию для них.

Глава 5

Производящие функции нескольких переменных

Производящие функции от двух переменных отвечают двухиндексным последовательностям. Такие последовательности удобно записывать в виде треугольника (соответствующего положительному квадранту целочисленной решетки).

5.1. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля изображен на рис. 5.1. Элементы этого треугольника перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, составленных из векторов единичной длины двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево-вниз.

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, — это уже хорошо знакомые нам биномиальные коэффициенты

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Это несложно доказать индукцией по n. Предположим, что числа в n-й строчке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена $(1+s)^n$. Число различных путей, ведущих в точку $(n+1,\, k)$, равно сумме числа путей, ведущих в точку $(n,\, k-1)$, и числа путей, ведущих в точку $(n,\, k)$, $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}$. Поэтому число $c_{n+1,k}$ совпадает с коэффициентом при s^k в многочлене $(1+s)\cdot(1+s)^n = (1+s)^{n+1}$.

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Например, можно рассмотреть

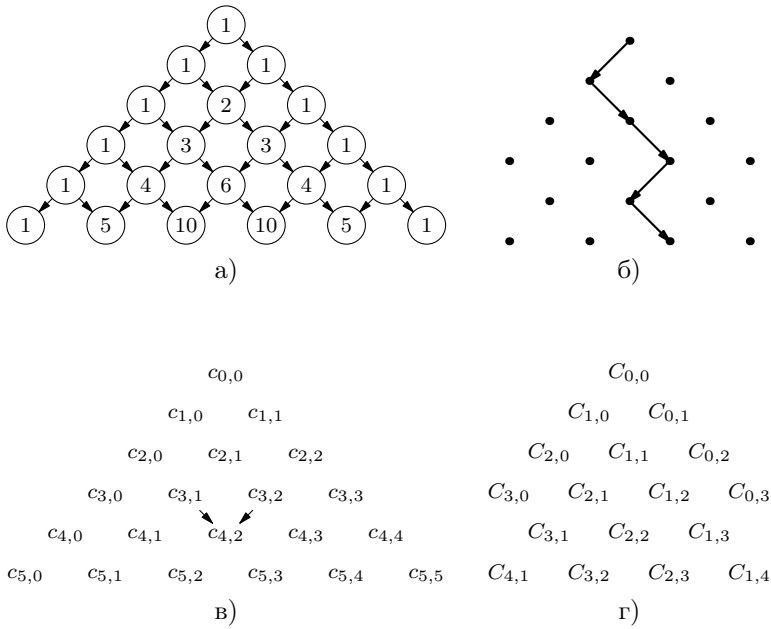


Рис. 5.1. Треугольник Паскаля и пути, которые он перечисляет

производящую функцию

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k}x^k y^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)y^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

Второй способ соответствует нумерации элементов треугольника числом отрезков каждого типа на путях, ведущих в соответствующую точку (рис. 5.1 г)). Для этой нумерации

$$C_{n,m} = c_{n+m,m} = \binom{n+m}{m},$$

и производящая функция имеет вид

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} x^n y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \binom{n+m}{n} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

На этот раз она оказалась симметричной по переменным x и y.

И, наконец, имеется еще один способ: сопоставить треугольнику Паскаля экспоненциальную производящую функцию. Экспоненциальная производящая функция отличается от обычной тем, что в качестве коэффициентов степенного ряда берутся не элементы последовательности a_n, а числа $a_n/n!$.

5.2. Экспоненциальные производящие функции

Зафиксируем произвольную последовательность $\{\alpha_n\}$. Каждой последовательности $\{a_n\}$ мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n s^n,$$

определяемую последовательностью $\{\alpha_n\}$. Если в последовательности $\{\alpha_n\}$ отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление взаимно однозначно. До сих пор мы пользовались только обычными производящими функциями — отвечающими последовательности $\alpha_n \equiv 1$. В зависимости от преследуемых целей пользу могут принести и другие последовательности. Чаще всего используется последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$. Соответствующие ей производящие функции называются *экспоненциальными*.

Экспоненциальные производящие функции для целочисленных последовательностей называются *функциями Гурвица*.

Чем отличаются экспоненциальные производящие функции от обычных? Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций при выполнении операций над ними. Сумма ведет себя обычным образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)}{n!} s^n,$$

а вот произведение иначе:

$$\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}s+\frac{a_2}{2!}s^2+\dots\right)\left(\frac{b_0}{0!}+\frac{b_1}{1!}s+\frac{b_2}{2!}s^2+\dots\right)=$$
$$=\frac{a_0}{0!}\frac{b_0}{0!}+\left(\frac{a_0}{0!}\frac{b_1}{1!}+\frac{a_1}{1!}\frac{b_0}{0!}\right)s+\left(\frac{a_0}{0!}\frac{b_2}{2!}+\frac{a_1}{1!}\frac{b_1}{1!}+\frac{a_2}{2!}\frac{b_0}{0!}\right)s^2+\dots$$

Коэффициенты $\frac{c_n}{n!}$ произведения вычисляются по формуле

$$c_n=\binom{n}{0}a_0b_n+\binom{n}{1}a_1b_{n-1}+\dots+\binom{n}{n}a_nb_0.$$

Еще одно существенное отличие экспоненциальных производящих функций от обычных наблюдается при взятии производных (и интегрировании). Дифференцирование или интегрирование экспоненциальной производящей функции приводит к сдвигу последовательности ее коэффициентов без изменения их величины:

$$\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}s+\frac{a_2}{2!}s^2+\dots\right)'=\frac{a_1}{0!}+\frac{a_2}{1!}s+\frac{a_3}{2!}s^2+\dots;$$
$$\int\left(\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}s+\frac{a_2}{2!}s^2+\dots\right)=\frac{a_0}{1!}s+\frac{a_1}{2!}s^2+\frac{a_2}{3!}s^3+\frac{a_3}{4!}s^4+\dots$$

Обычная производящая функция $A(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+\dots$ выражается через экспоненциальную $\mathcal{A}(t)=\frac{a_0}{0!}+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\dots$ по формуле

$$A(s)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\mathcal{A}(st)dt.$$

Действительно,

$$k!=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^kdt.$$

Теперь мы можем выписать экспоненциальную производящую функцию для треугольника Паскаля:

$$\sum_{n,m=0}^\infty\frac{1}{(n+m)!}\binom{n+m}{m}x^ny^m=\sum_{n=0}^\infty\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}.$$

Несколько более сложных примеров экспоненциальных производящих функций будут обсуждаться ниже.

5.3. Треугольник Дика

Треугольник Дика перечисляет пути в положительном квадранте плоскости, выходящие из начала координат и составленные из векторов $(1,\,1)$ и $(1,\,-1)$ (см. рис. 5.2). Пути, оканчивающиеся на оси абсцисс, — это пути Дика из раздела 2.5.

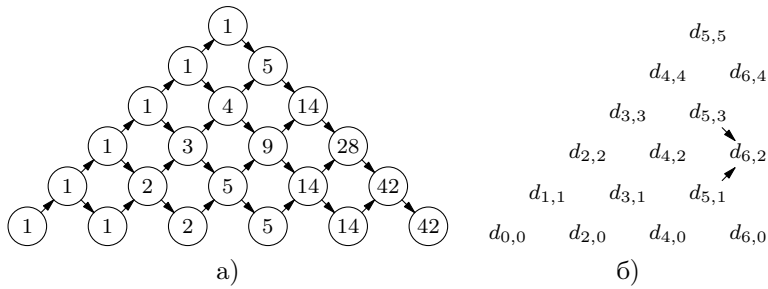


Рис. 5.2. Треугольник Дика

Нетрудно видеть, что элементы d_{ij} треугольника Дика отличны от нуля в том и только в том случае, если $i \geqslant j$ и $i+j$ четно. Обозначим через $D(x,\,y)$ производящую функцию Дика двух переменных

$$D(x,\,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{ij} x^i y^j.$$

Правило построения треугольника Дика подсказывает нам уравнение на эту производящую функцию

$$xyD(x,\,y) + (D(x,\,y) - D(x,\,0))\frac{x}{y} = D(x,\,y) - 1.$$

Действительно, коэффициент при любом мономе $x^i y^j$, отличном от единичного, представляет собой сумму коэффициентов при мономах $x^{i-1}y^{i-1}$ и $x^{i-1}y^{j+1}$. Функция

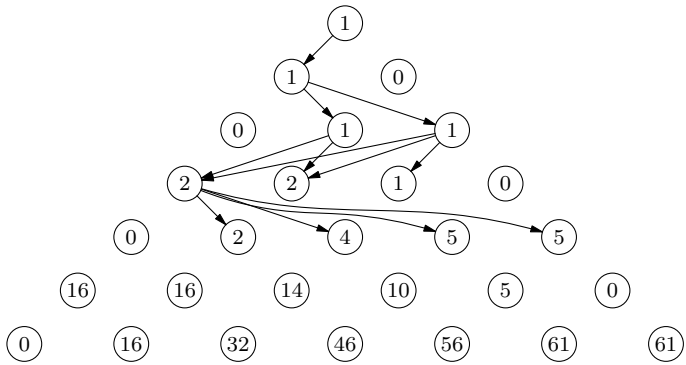
$$D(x,\,0) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

нам хорошо известна, и ряд $D(x,\,y)$ находится решением линейного уравнения,

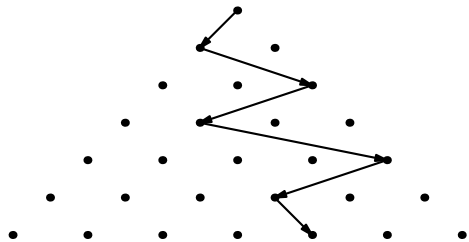
$$D(x,\,y) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}-2xy}{2x(xy^2+x-y)}.$$

5.4. Треугольник Бернулли—Эйлера и перечисление змей

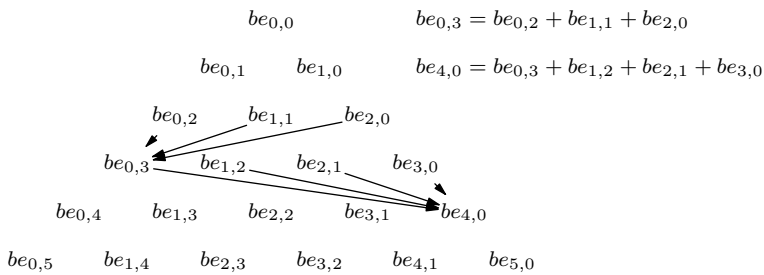
Треугольник Бернулли—Эйлера (см. рис. 5.3), как и треугольник



а)



б)



в)

Рис. 5.3. Треугольник Бернулли—Эйлера и пути, которые он перечисляет

Паскаля, обладает многими замечательными свойствами. Левая сторона этого треугольника называется *стороной Бернулли*, правая — *стороной Эйлера*[1].

Элементы треугольника Бернулли—Эйлера — тоже числа путей из вершины треугольника в данную клетку. Но при этом рассматриваются только пути, идущие зигзагом: нечетные шаги влево, четные — вправо. Поэтому каждое число в треугольнике Бернулли—Эйлера равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева или справа от него, в зависимости от четности строки.

Можно дать и более простое индуктивное правило определения чисел в треугольнике Бернулли—Эйлера, если чередовать знаки через каждые две строчки (см. рис. 5.4). В таком альтернированном тре-

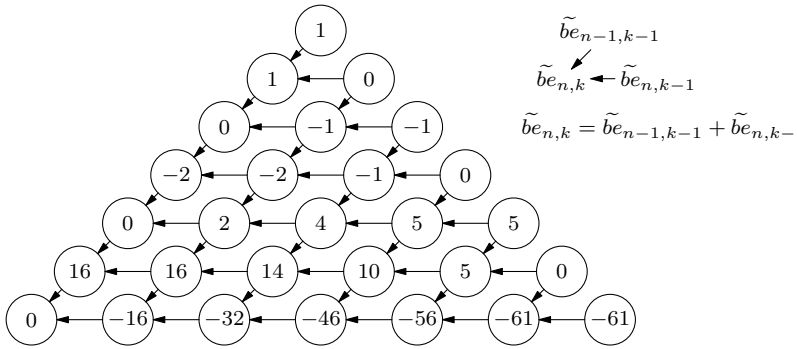


Рис. 5.4. Альтернированный треугольник Бернулли—Эйлера

угольнике каждый элемент равен сумме двух ближайших элементов, стоящих справа и справа сверху от него. Для того чтобы однозначно задать треугольник, необходимо доопределить сторону Эйлера, чем мы сейчас и займемся. Нам понадобятся еще две интерпретации треугольника Бернулли—Эйлера — в терминах морсовских многочленов и up-down перестановок.

Определение 5.1. Точка x_0 называется *критической точкой* многочлена $p = p(x)$, если она является корнем его производной, $p'(x_0) = 0$. Касательная к графику многочлена в критической точке горизонтальна. Значение $p(x_0)$ многочлена p в критической точке

[1]Отметим, что есть еще две последовательности чисел, которые также носят имена Бернулли и Эйлера.

называется *критическим значением* этого многочлена. Многочлен p называется *морсовским*, если

а) все его критические точки вещественны и различны;

б) все его критические значения различны.

Морсовский многочлен степени $n+1$ имеет n критических точек и n критических значений. Мы будем рассматривать многочлены вида

$$p(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n+1}, \tag{5.1}$$

старший коэффициент которых равен 1.

Каждому морсовскому многочлену можно сопоставить перестановку на множестве из n элементов. Эта перестановка указывает порядок, в котором идут критические значения многочлена. Для построения перестановки перенумеруем критические точки и критические значения многочлена в порядке возрастания. На i-м месте в определяемой перестановке стоит номер критического значения в i-й критической точке (см. рис. 5.5). Ясно, что каждый элемент такой переста-

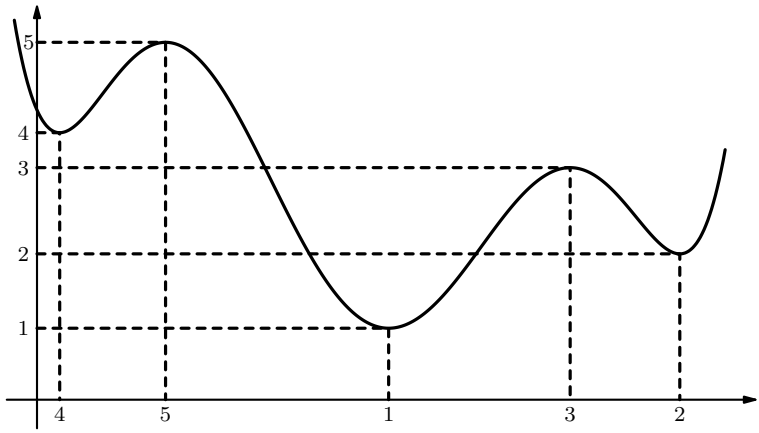


Рис. 5.5. Перестановка, соответствующая морсовскому многочлену

новки либо больше обоих своих соседей (отвечающее ему критическое значение является локальным максимумом), либо меньше их (соответственно, критическое значение является локальным минимумом). Такие перестановки называются *пилообразными*, или *up-down* перестановками. Пилообразную перестановку, отвечающую морсовскому многочлену, назовем *типом* этого многочлена.

Заметим, что не любая пилообразная перестановка может служить типом морсовского многочлена вида (5.1): последний элемент в ней должен быть меньше своего левого соседа. Как результат, при n нечетном первый элемент в перестановке должен быть меньше, а при n четном — больше своего правого соседа.

Типы морсовских многочленов при малых значениях n изображены на рис. 5.6. При $n=1$ и $n=2$ имеется ровно одна возможность.

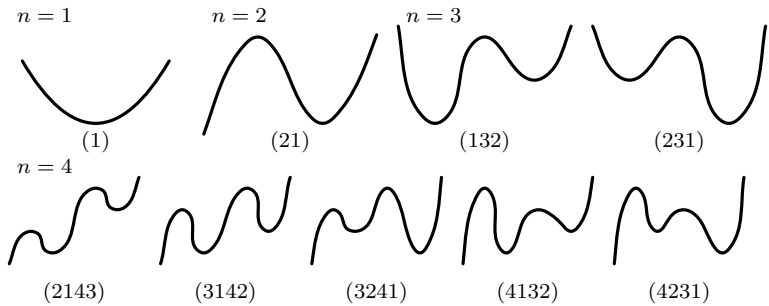


Рис. 5.6. Типы морсовских многочленов при $n=1$, 2, 3, 4

При $n=3$ имеется 2 возможности, при $n=4$ таких возможностей 5. Если продолжить перечисление, то можно получить последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 16,\ 61,\ 272,\ \ldots$$

Элементы этой последовательности, отвечающие нечетным значениям n, совпадают с последовательностью ненулевых элементов стороны Бернулли, а подпоследовательность элементов с четными номерами совпадает с ненулевой частью стороны Эйлера.

Чтобы понять, откуда берется связь с треугольником Бернулли—Эйлера, рассмотрим типы морсовских многочленов, у которых первое критическое значение имеет номер k.

Лемма 5.2. *Пусть $c_{n,k}$ — число типов морсовских многочленов степени $n+1$, у которых первое критическое значение имеет номер k. Тогда $c_{n,k}$ есть k-е число в n-й строке треугольника Бернулли—Эйлера.*

Доказательство. Для первых двух строк треугольника утверждение проверяется непосредственно. Докажем, что если оно верно для n-й строки, то оно верно и для строки с номером $n+1$. Пусть,

для определенности, $n+1$ четно. Тогда n и $n+2$ нечетны; мы изучаем типы многочленов степени $n+2$. Первое критическое значение в таком многочлене является максимумом, второе — минимумом, поэтому второе критическое значение меньше первого.

Отбрасывание первого критического значения многочлена дает однозначно определенный тип морсовского многочлена степени $n+1$. Первое критическое значение у такого многочлена может быть k-м, $k+1$-м, $\ldots$, n-м по величине. Наоборот, по каждому типу многочлена степени $n+1$, у которого первое критическое значение является l-м по величине ($l \geqslant k$), мы можем единственным образом построить тип многочлена степени $n+2$, у которого первое критическое значение является k-м по величине. Таким образом,

$$c_{n+1,k} = c_{n,k} + c_{n,k+1} + \ldots + c_{n,n}.$$

Для строки с нечетным номером справедливо аналогичное рассуждение. Тем самым, числа $c_{n,k}$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и элементы треугольника Бернулли—Эйлера, а значит, именно они и стоят в этом треугольнике. □

Рассмотрим по отдельности два случая:

1) n нечетно; соответствующее число up-down перестановок обозначим через b_n и введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{B}(x) = \frac{b_1}{1!}x + \frac{b_2}{2!}x^2 + \ldots = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \ldots;$$

2) n четно; соответствующее число up-down перестановок обозначим через e_n и введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{E}(y) = 1 + \frac{e_1}{1!}y + \frac{e_2}{2!}y^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{5}{4!}y^4 + \ldots$$

Выведем рекуррентную формулу для числа up-down перестановок. Для этого возьмем самый высокий максимум многочлена и унесем его в бесконечность (см. рис. 5.7). В результате мы сопоставили каждому типу многочлена два новых типа, причем если изначально имелась $n+1$ критическая точка, то получились многочлены с k и $n-k$ критическими точками, $n-k$ нечетно.

При нечетном n получаем рекуррентное соотношение на числа b_n:

$$b_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}. \tag{5.2}$$

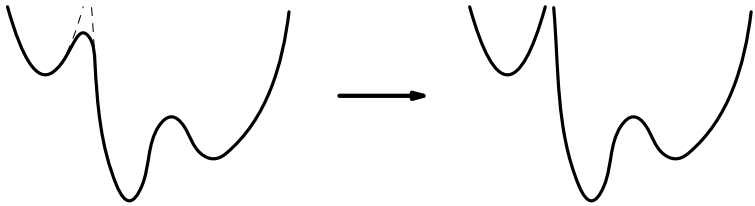


Рис. 5.7. Сопоставление типу многочлена двух новых типов

Биномиальный коэффициент возникает из-за того, что мы должны перемешать множество критических значений левого и правого многочлена, т. е. выбрать из n критических значений те, которые принимаются левым многочленом.

Вспоминая, что для экспоненциальных производящих функций правая часть соответствует квадрату производящей функции $\mathcal{B}(x)$, а левая — ее же производной, перепишем уравнение (5.2) в виде

$$\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}^2(x) + 1. \tag{5.3}$$

Последнее уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$\begin{gathered} d\mathcal{B} = (\mathcal{B}^2 + 1)\, dx, \\ \int \frac{d\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 + 1} = \int dx, \\ \operatorname{arctg} \mathcal{B} = x, \\ \mathcal{B}(x) = \operatorname{tg} x. \end{gathered}$$

Таким образом, сторона Бернулли определяет разложение в ряд тангенса:

$$\mathcal{B}(x) = \operatorname{tg} x = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Коэффициенты b_n в разложении тангенса называются *тангенциальными числами*. Обратите внимание на то, что единица в вершине треугольника не включается в сторону Бернулли.

Если же n четно, то рекуррентное соотношение принимает вид

$$e_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} e_k b_{n-k}, \tag{5.4}$$

и ему соответствует уравнение

$$\mathcal{E}'(y) = \mathcal{E}(y) B(y). \tag{5.5}$$

на производящие функции. Решая последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}'(y)}{\mathcal{E}(y)} &= B(y),\\ (\ln \mathcal{E}(y))' &= \operatorname{tg} y,\\ \ln \mathcal{E}(y) &= \int \operatorname{tg} y,\\ \mathcal{E}(y) &= \frac{1}{\cos y},\end{aligned}$$

и сторона Эйлера определяет разложение в ряд секанса. Коэффициенты e_n этого разложения называются *числами Эйлера*[1].

Воспользовавшись подстановкой

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i, \quad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,$$

мы можем переписать производящие функции сторон для альтернированного треугольника в виде

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}.$$

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления экспоненциальной производящей функции альтернированного треугольника Бернулли—Эйлера. Обозначим через $\mathrm{be}_{k,l}$ элемент треугольника, имеющий координату k вдоль стороны Бернулли и координату l вдоль стороны Эйлера.

Теорема 5.3. *Экспоненциальная производящая функция для альтернированного треугольника Бернулли—Эйлера имеет вид*

$$\mathcal{BE}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathrm{be}_{k,l} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!} = \frac{2e^x}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Докажем, что экспоненциальная производящая функция для треугольника Бернулли—Эйлера удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{BE}(x, y) + \frac{\partial \mathcal{BE}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{BE}(x, y)}{\partial x}.$$

Записанное выше равенство есть не что иное, как правило образования альтернированного треугольника. Действительно, рассмотрим

[1] Обычно числами Эйлера называют числа, стоящие на стороне Эйлера в альтернированном треугольнике (т. е. числа, знак которых меняется). Мы, однако, позволим себе не проводить различия между этими двумя последовательностями.

прямую в треугольнике, параллельную стороне Эйлера. Дифференцирование по y экспоненциальной производящей функции этой прямой есть сдвиг на единицу вдоль стороны Эйлера. Суммируя результат дифференцирования с исходной функцией, мы получаем соседнюю прямую (так как $\mathrm{be}_{k,m} = \mathrm{be}_{k-1,m} + \mathrm{be}_{k-1,m+1}$), т. е. результат дифференцирования по x исходной экспоненциальной производящей функции.

Таким образом, функция $\mathcal{BE}(x, y)$ однозначно определяется своим начальным значением

$$\mathcal{BE}(0, y) = \widetilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

и дифференциальным уравнением. Для доказательства теоремы осталось только проверить, что функция (5.6) удовлетворяет выписанному дифференциальному уравнению. □

5.5. Многочлены Бернулли

Введем на пространстве многочленов операцию *усреднения*, положив

$$A(f(x)) = \int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

Нетрудно видеть, что эта операция действительно переводит многочлены в многочлены: она линейна, т. е. $A(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 A(f_1) + a_2 A(f_2)$ для любых постоянных a_1, a_2 и любых многочленов f_1, f_2, а ее значение на мономе x^n равно

$$A(x^n) = ((x+1)^{n+1} - x^{n+1})/(n+1) = x^n + \ldots,$$

где многоточие обозначает слагаемые, степени которых меньше n. Последняя формула показывает также, что преобразование A переводит пространство многочленов степени не выше n в себя, а значит, является линейным опертором в этом пространстве. Этот оператор обратим. Действительно, любой многочлен степени не выше $n-1$ может быть получен в результате усреднения многочлена такой же степени, и, используя последнюю формулу, мы заключаем, что и любой многочлен степени не выше n является результатом усреднения некоторого многочлена степени не выше n. Отметим, что при усреднении степень многочлена сохраняется.

Определение 5.4. *Многочленом Бернулли* степени n называется многочлен $B_n(x)$, результатом усреднения которого служит моном x^n, т. е. $B_n(x) = A^{-1}(x^n)$.

Первые многочлены Бернулли нетрудно сосчитать.

$$B_0(x) = 1;$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2};$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6};$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x;$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30};$$
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x;$$
$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$

Теорема 5.5. *Экспоненциальная производящая функция для многочленов Бернулли имеет вид*

$$\mathcal{B}(x,\, s) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{s^n}{n!} = \frac{s}{e^s - 1}e^{sx}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно применить операцию усреднения к левой и правой частям равенства. С одной стороны, мы имеем

$$A(B(x,\, s)) = \sum_{n=0}^{\infty} A(B_n(x))\frac{s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{s^n}{n!} = e^{xs}.$$

С другой стороны, имеем

$$A\Big(\frac{s}{e^s - 1}e^{sx}\Big) = \frac{s}{e^s - 1}A(e^{sx}) = \frac{s}{e^s - 1}\frac{1}{s}(e^{s(x+1)} - e^{sx}) = e^{xs},$$

и теорема доказана. □

Определим теперь *числа Бернулли* как значения многочленов Бернулли в нуле. Вот начало последовательности чисел Бернулли:

$$1,\, -\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{1}{6},\, -\frac{1}{30},\, 0\frac{1}{42},\, 0,\, -\frac{1}{30},\, 0\frac{5}{66},\, 0,\, -\frac{691}{2730},\, 0,\, \frac{7}{6},\, \ldots$$

Равенство нулю чисел Бернулли с положительными четными номерами вытекает из задачи 5.4.

Доказанная теорема позволяет нам легко выписать экспоненциальную производящую функцию для чисел Бернулли. Для этого

достаточно подставить в экспоненциальную производящую функцию для многочленов Бернулли значение $x = 0$:

$$\sum_{n=0} B_n \frac{s^n}{n!} = \frac{s}{e^s - 1}.$$

5.6. Представления производящих функций в виде непрерывных дробей

Производящая функция для чисел Каталана удовлетворяет квадратному уравнению (2.13)

$$s^2 \operatorname{Cat}^2(s) - \operatorname{Cat}(s) + 1 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\operatorname{Cat}(s) - s^2 \operatorname{Cat}^2(s) = 1,$$

или

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1}{1 - s^2 \operatorname{Cat}(s)}. \tag{5.7}$$

Подставив выражение для $\operatorname{Cat}(s)$ из левой части равенства (5.7) в правую часть того же равенства, получим

$$\operatorname{Cat}(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2}{1 - s^2 \operatorname{Cat}(s)}}.$$

Подставляя вновь выражение (5.7) для $\operatorname{Cat}(s)$ в получившееся равенство и продолжая этот процесс, мы получаем представление для функции Каталана в виде *непрерывной дроби*:

$$\operatorname{Cat}(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2}{1 - \cfrac{s^2}{1 - \dots}}}. \tag{5.8}$$

Полученное разложение нужно понимать следующим образом. Если мы оборвем непрерывную дробь на n-м шаге (оставив вместо нее конечную непрерывную дробь, которая представляет собой рациональную функцию), то коэффициенты разложения полученной функции по степеням s будут совпадать с коэффициентами разложения функции $\operatorname{Cat}(s)$ вплоть до члена s^{2n}. Заметим, что из-за наличия множителя s^2 в числителе очередной дроби, присоединяемой на $(n+1)$-м

шаге, увеличение числа членов в непрерывной дроби не приводит к изменению первых n коэффициентов в ее разложении. Например,

$$\frac{1}{1-s^2} = \mathbf{1 + s^2} + s^4 + s^6 + s^8 + \ldots,$$

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{s^2}{1-s^2}} = \mathbf{1 + s^2 + 2s^4} + 4s^6 + 8s^8 + \ldots,$$

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{s^2}{1-\cfrac{s^2}{1-s^2}}} = \mathbf{1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6} + 13s^8 + \ldots,$$

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{s^2}{1-\cfrac{s^2}{1-\cfrac{s^2}{1-s^2}}}} = \mathbf{1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6 + 14s^8} + \ldots$$

Стабилизирующаяся часть разложения выделена.

Представление функции Каталана в виде непрерывной дроби тесно связано с двумя способами ее получения — перечислением путей по треугольнику Дика (раздел 2.5) и с помощью производящей грамматики (раздел 3.2). Подобное представление можно распространить и на другие функции, перечисляющие различные пути.

Изменим несколько треугольник Дика (рис. 5.1), поставив на стрелках числа. А именно, поставим на каждой стрелке номер того ряда, в котором она находится (см. рис. 5.8 а)). Номер на стрелке мы будем интерпретировать как ее кратность, т. е. как число различных стрелок, проходящих в данном направлении. В результате одному пути в треугольнике Дика отвечает несколько «различных» путей в треугольнике с кратностями. Их число равно произведению кратностей всех ребер, входящих в данный путь.

Числа, стоящие в нижней строке треугольника (рис. 5.8 а)), напоминают уже хорошо нам известную последовательность чисел Эйлера из раздела 5.4. Сейчас мы построим непрерывную дробь, отвечающую этому треугольнику, а доказательство того, что в его основании действительно лежат числа Эйлера, отложим до следующего раздела.

Теорема 5.6. *Производящая функция*

$$F_0(s) = 1 + s^2 + 5s^4 + 61s^6 + 1385s^8 + \ldots$$

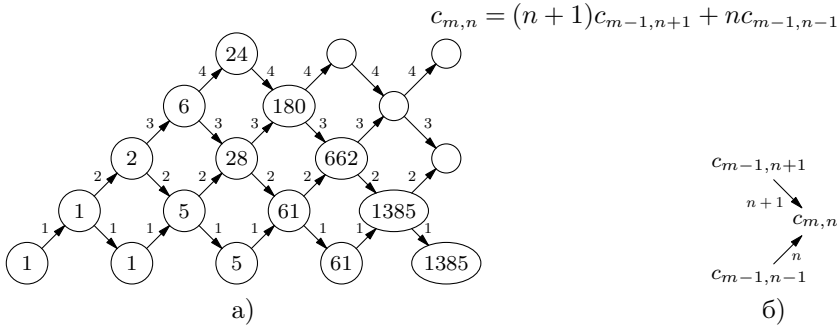


Рис. 5.8. Треугольник Дика с кратностями

для нижней стороны треугольника с рис. 5.8 а) *представляется в виде непрерывной дроби*

$$F_0(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1^2 s^2}{1 - \cfrac{2^2 s^2}{1 - \cfrac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

Доказательство. Производящая функция $F_0(s)$ перечисляет различные пути с началом и концом на высоте 0. Обозначим через $F_i(s)$ производящую функцию, перечисляющую пути с началом и концом на высоте i, которые не опускаются ниже уровня i, по их длине. Тогда

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)}.$$

Действительно, каждый путь с началом и концом на высоте 0 единственным образом разбивается на такие участки, что

1) концы пути на каждом участке лежат на высоте 0;

2) высота всех промежуточных точек пути на каждом участке больше нуля.

Если отбросить начальный и конечный отрезок такого участка, то мы получим путь, начинающийся и заканчивающийся на высоте 1.

Аналогично,

$$F_1(s) = \frac{1}{1 - 4s^2 F_2(s)}.$$

Появление четверки в коэффициенте при s^2 объясняется тем, что к данному пути, начало и конец которого лежат на высоте 2, на-

чальный и конечный векторы, превращающие его в путь на высоте 1, можно добавить четырьмя «различными» способами.

Продолжая это рассуждение, мы заключаем, что

$$F_k(s) = \frac{1}{1-(k+1)^2 s^2 F_{k+1}(s)},$$

и непрерывная дробь теперь выписывается очевидным образом:

$$F_0(s) = \frac{1}{1-s^2F_1(s)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{s^2}{1-4s^2F_2(s)}} = \ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{s^2}{1-\cfrac{4s^2}{1-\cfrac{9s^2}{1-\ldots}}}}. \qquad \square$$

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает, что распределение кратностей по восходящему и нисходящему векторам пути в каждом слое не имеет значения. Необходимо лишь, чтобы произведение этих кратностей внутри каждого слоя было постоянным. Например, треугольник, изображенный на рис. 5.9, порождает ту же производящую функцию для путей с нулевой высотой начала и конца, что и треугольник с рис. 5.8 а). Заметим, что то же справедливо и для путей на других высотах.

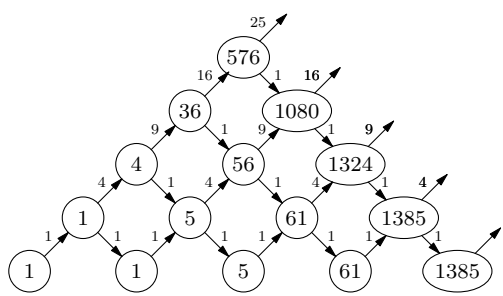


Рис. 5.9. Другая расстановка кратностей в треугольнике Дика

Конечно, доказательство теоремы обобщается на произвольную расстановку кратностей. Более того, его можно без труда перенести и на треугольник Моцкина (см. рис. 5.10).

Теорема 5.7. *Пусть через* α_i, β_i, γ_i *обозначены кратности векторов* $(1, 1)$, $(1, -1)$ *и* $(1, 0)$ *соответственно в* i*-м слое взвешенного*

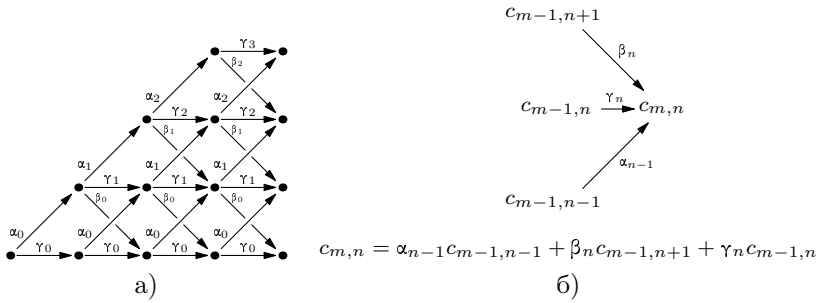


Рис. 5.10. Треугольник Моцкина с кратностями

треугольника Моцкина. Тогда производящая функция $F_k(s)$ для путей с началом и концом на высоте k, не опускающихся ниже этой высоты, представляется в виде непрерывной дроби

$$F_k(s) = \cfrac{1}{1 - \gamma_k s - \cfrac{\alpha_k \beta_k s^2}{1 - \gamma_{k+1} s - \cfrac{\alpha_{k+1}\beta_{k+1} s^2}{1 - \dots}}}.$$

Доказательство. Конечно, эта теорема доказывается так же, как и ее частный случай теорема 5.6. Мы, однако, хотим изложить то же самое доказательство на языке формальных грамматик (глава 3). Сопоставим векторам (1, 1), (1, −1), (1, 0) в i-м слое буквы a_i, b_i, c_i соответственно. Мы будем рассматривать языки $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, ... в алфавите из бесконечного набора букв $\{a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \dots, \}$. Язык $\mathcal{F}_k$ состоит из слов, отвечающих путям с началом и концом на высоте k, не опускающимся ниже этой высоты.

Грамматика

$$\begin{aligned}
r_0 &\longrightarrow \lambda,\\
r_0 &\longrightarrow c_0 r_0,\\
r_0 &\longrightarrow a_0 r_1 b_0 r_0,\\
r_1 &\longrightarrow \lambda,\\
r_1 &\longrightarrow c_1 r_1,\\
r_1 &\longrightarrow a_1 r_2 b_1 r_1,
\end{aligned}$$

является грамматикой с однозначным выводом. Буква r_k, $k = 0$, 1, 2, ... порождает язык $\mathcal{F}_k$. Поэтому некоммутативные производящие

функции для языков $\mathcal{F}_k$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \lambda + c_0\mathcal{F}_0 + a_0\mathcal{F}_1 b_0\mathcal{F}_0,\\ \mathcal{F}_1 &= \lambda + c_1\mathcal{F}_1 + a_1\mathcal{F}_2 b_1\mathcal{F}_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Подставляя $\lambda = 1$, $a_i = \alpha_i s$, $b_i = \beta_i s$, $c_i = \gamma_i s$, получаем систему уравнений на коммутативные производящие функции

$$\begin{aligned}F_0(s) &= 1 + \gamma_0 s F_0(s) + \alpha_0\beta_0 s^2 F_0(s)F_1(s),\\ F_1(s) &= 1 + \gamma_1 s F_1(s) + \alpha_1\beta_1 s^2 F_1(s)F_2(s),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

откуда

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \alpha_0\beta_0 s^2 F_1(s)} = \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \dfrac{\alpha_0\beta_0 s^2}{1 - \gamma_1 s - \alpha_1\beta_1 s^2 F_2(s)}} = \ldots$$

Вывод формул для остальных F_k аналогичен, и теорема доказана. □

5.7. Числа Эйлера в треугольнике с кратностями

Предложение 5.8. *В основании треугольника на рис.* 5.8 а) *находятся числа Эйлера.*

Доказательство. Мы будем доказывать, что число различных путей длины $2n$ в треугольнике Дика с кратностями равно числу пилообразных перестановок на множестве $\{1, \ldots, 2n-1\}$ или, что то же самое, числу типов морсовских многочленов степени $2n$. Присоединим к множеству элементов перестановки дополнительный элемент $2n$, считая его последним элементом каждой перестановки. (Напомним, что мы рассматриваем только такие пилообразные перестановки, которые остаются пилообразными при присоединении последним максимального элемента.)

Сопоставим пилообразной перестановке путь в треугольнике Дика по следующему правилу. Элемент i перестановки является либо (локальным) максимумом, либо (локальным) минимумом в ней. Выберем i-й отрезок пути идущим вверх, если элемент i перестановки является минимумом, и идущим вниз в противном случае. На рис. 5.11 приведены пилообразная перестановка и соответствующий ей путь. Ясно,

что получившийся путь действительно является путем Дика. В самом деле, количество максимумов в пилообразной перестановке равно количеству минимумов, и среди первых k элементов $1, \ldots, k$ не более половины максимумов при любом k.

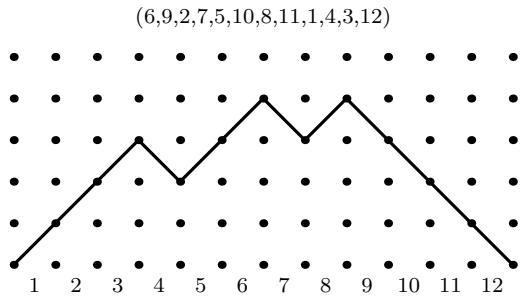


Рис. 5.11. Путь Дика, отвечающий пилообразной перестановке

Выясним, сколько перестановок соответствуют данному пути. Предположим, что путь, отвечающий первым m элементам перестановки, заканчивается на высоте k. И предположим также, что последний элемент m является максимумом (т. е. последний вектор пути — спуск). Каким может быть минимум, примыкающий к максимуму m справа? Этот минимум лежит среди первых $m-1$ элементов перестановки и его можно выбрать $k+1$ различными способами. Действительно, если за каждым максимумом среди элементов $1, \ldots, m-1$ уже закреплен парный соседний справа минимум, то свободных минимумов осталось ровно $k+1$.

Рассуждение для случая, когда последний элемент m — минимум проводится аналогично, только нужно выбирать соседний справа максимум и идти по перестановке справа налево, а не слева направо. □

5.8. Сравнения в последовательностях

Этот раздел посвящен свойствам последовательностей целых чисел, приведенных по различным модулям.

Рассмотрим, например, последовательность чисел Эйлера

$$1,\ 1,\ 5,\ 61,\ 1385,\ \ldots$$

Остатки от деления элементов этой последовательности на 4 образуют новую последовательность

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

Можно проверить, что и последующие члены этой последовательности также будут единицами.

Та же самая последовательность, взятая по модулю 3, выглядит следующим образом:

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Периодичность последовательности подсказывает нам, что она задается рациональной производящей функцией. Действительно, пусть N — длина периода последовательности a_i, т. е. $a_{k+N} = a_k$ для всех достаточно больших k. Тем самым, последовательность задается линейным рекуррентным соотношением и, согласно теореме 2.1, соответствующая производящая функция рациональна.

В случае чисел Эйлера такую производящую функцию несложно найти. Действительно, рассмотрим представление производящей функции для них в виде непрерывной дроби

$$E(s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1^2 s^2}{1 - \cfrac{2^2 s^2}{1 - \cfrac{3^2 s^2}{1 - \ldots}}}}.$$

При приведении последовательности по модулю 4 второй член этой дроби обращается в нуль, поэтому вся дробь принимает вид

$$E_4(s) \equiv \frac{1}{1 - s^2} \mod 4.$$

(Два ряда с целыми коэффициентами сравнимы по какому-либо модулю, если по этому модулю сравнимы соответствующие коэффициенты рядов.) При приведении по модулю 3 обращается в нуль третий член, и дробь выглядит так:

$$E_3(s) \equiv \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2}{1 - 4s^2}} \mod 3 \equiv \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \mod 3.$$

Вообще, при приведении последовательности чисел Эйлера по модулю p мы получаем конечную дробь

$$E_p(s) \equiv \cfrac{1}{1 - \cfrac{1^2 s^2}{1 - \ldots \cfrac{(p-2)^2 s^2}{1 - (p-1)^2 s^2}}} \mod p,$$

так как коэффициент p^2 в следующем числителе сравним с нулем по модулю p и, тем самым, обращает в нуль весь хвост непрерывной дроби. Ясно, как распространить это рассуждение на произвольную непрерывную дробь.

Теорема 5.9. *Пусть производящая функция $A(s)$ представлена в виде непрерывной дроби*

$$A(s) = \cfrac{1}{1 - c_1 s - \cfrac{p_1 s^2}{1 - c_2 s - \cfrac{p_2 s^2}{1 - c_3 s - \cfrac{p_3 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

Тогда функция $A_p(s) \equiv A(s) \mod p$ рациональна для любого числа p, являющегося делителем одного из произведений p_1, $p_1 p_2$, $p_1 p_2 p_3$, $\dots$ Если p делит произведение $p_1 \dots p_k$, то

$$A_p(s) \equiv \cfrac{1}{1 - c_1 s - \cfrac{p_1 s^2}{1 - \dots \cfrac{p_{k-2} s^2}{1 - c_{k-1} s - p_{k-1} s^2}}} \mod p.$$

Таким образом, теорема 5.9 позволяет найти представление в виде рациональной производящей функции для последовательностей, отвечающих взвешенным треугольникам Дика, которые приведены по некоторым (иногда даже по всем, как в случае чисел Эйлера) модулям.

Другой подход к изучению арифметических свойств элементов числовых последовательностей основан на использовании различных комбинаторных представлений для них. Вот простейший пример подобного рассуждения. Число

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

является целым при любом n, однако непосредственно из формулы это не очевидно. Мы знаем, впрочем, что это число равно числу правильных скобочных структур из n пар скобок, и поэтому оно не может не быть целым.

Представление чисел Каталана триангуляциями правильных $(n+2)$-угольников позволяет доказать следующее утверждение.

Предложение 5.10. *Если число $n+2$ является степенью простого числа, $n+2 = p^k$ и $n > 1$, то число Каталана c_n делится на p.*

Например,

$$c_2 = 2 \equiv 0 \mod 2; \quad c_5 = 42 \equiv 0 \mod 7; \quad c_7 = 429 \equiv 0 \mod 3.$$

Доказательство. Группа $\mathbb{Z}_{n+2}$ вычетов по модулю $n+2$ действует на множестве триангуляций правильного $(n+2)$-угольника поворотами. При $n > 1$ у этого действия нет неподвижных точек. Поэтому длина каждой его орбиты делится на p, а, значит, делится на p и число триангуляций. □

Аналогично, представление чисел Каталана правильными скобочными структурами дает еще одно свойство этих чисел.

Предложение 5.11. *Если число n есть степень простого числа, $n = p^k$, то $c_n \equiv 2 \mod p$.*

Например,

$$c_2 = 2 \equiv 2 \mod 2; \quad c_3 = 5 \equiv 2 \mod 3; \quad c_5 = 42 \equiv 2 \mod 5.$$

Доказательство. Группа вычетов $\mathbb{Z}_{2n}$ по модулю $2n$ действует на множестве правильных скобочных структур из n пар скобок по следующему правилу. Образующая этой группы представляется циклическим сдвигом на единицу. При таком сдвиге

1) самая левая скобка стирается;

2) вместо нее в структуру добавляется самая правая скобка;

3) правая скобка, парная стертой самой левой скобке, заменяется на левую скобку. Все остальные скобки не меняются. При $n > 1$ у этого действия нет неподвижных точек.

Ровно одна орбита такого действия имеет длину 2. Она состоит из скобочных структур

$$\underbrace{()()\ldots()}_{n \text{ пар скобок}} \quad \text{и} \quad (\underbrace{()\ldots()}_{\substack{n-1 \text{ пара} \\ \text{скобок}}}).$$

Длины остальных орбит делятся на p, что и доказывает утверждение. □

5.9. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений на производящие функции

При выводе производящих функций для сторон Бернулли и Эйлера треугольника Бернулли—Эйлера нам пришлось решать дифференциальные уравнения на эти функции. Оба эти уравнения (5.3)

и (5.5) принадлежат к одному классу обыкновенных дифференциальных уравнений, вопрос о существовании и единственности решения которых решается следующей теоремой.

Теорема 5.12. *Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$f'(s) = F(s,\, f(s)) \tag{5.9}$$

на производящую функцию $f(s)$, *где* $F = F(s,\, t)$ — *производящая функция двух переменных, являющаяся многочленом по* t (*т. е. степень* F *по* t *конечна*). *Тогда для каждого* f_0 *уравнение* (5.9) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* $f(0) = f_0$.

Для уравнения (5.3) функция F имеет вид

$$F(s,\, t) = t^2 + 1,$$

а для уравнения (5.5) она равна

$$F(s,\, t) = B(s)t.$$

Доказательство теоремы. Доказательство проводится обычным способом последовательного нахождения коэффициентов функции f. Пусть степень F по t равна n и

$$F(s,\, t) = (F_{00} + F_{10}s + F_{20}s^2 + \dots) + (F_{01} + F_{11}s + F_{21}s^2 + \dots)t + \dots$$
$$\dots + (F_{0n} + F_{1n}s + F_{2n}s^2 + \dots)t^n, \qquad f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots$$

Приравнивая коэффициенты при s^0 в левой и правой частях уравнения (5.9), получаем

$$f_1 = F_{00} + F_{01}f_0 + \dots + F_{0n}f_0^n.$$

Аналогично, равенство коэффициентов при s^1 дает

$$2f_2 = F_{10} + F_{01}f_1 + F_{11}f_0 + \dots + F_{0n}f_0^{n-1}f_1 + F_{1n}f_0^n.$$

Вообще, f_n находится из уравнения

$$nf_n = \dots, \tag{5.10}$$

где точками обозначен многочлен от коэффициентов функции F и коэффициентов $f_0,\, f_1,\, \dots,\, f_{n-1}$ функции f. При каждом $n > 0$ уравнение (5.10) имеет единственное решение, и теорема доказана. □

5.10. Задачи

5.1. Многочлен Чебышева T_n определяется формулой

$$\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi).$$

Вот несколько первых многочленов Чебышева:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Докажите, что $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ и выведите отсюда, что

$$\sum_{n\geqslant 0} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

5.2. Пусть последовательность $\{a_n\}$, начинающаяся с чисел 1, 1, 2, 5, 17, 73, …, определена условиями

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (n+1)a_n - \binom{n}{2}a_{n-2}, \ \ n > 1.$$

Докажите, что экспоненциальная производящая функция $A(s)$ для этой последовательности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-s)A'(s) = \left(1 - \frac{1}{2}s^2\right)A(s)$$

и имеет вид

$$A(s) = (1-s)^{-1/2}e^{s/2+s^2/4}.$$

5.3. Докажите, что

а) сумма и произведение двух функций Гурвица является функцией Гурвица;

б) производная и интеграл функции Гурвица является функцией Гурвица;

в) результат подстановки функции Гурвица в функцию Гурвица является функцией Гурвица;

г) если в условиях теоремы 5.12 правая часть F уравнения является функцией Гурвица и число f_0 целое, то решение f этого уравнения с начальным условием $f(0) = f_0$ будет функцией Гурвица.

5.4. Докажите, что многочлены Бернулли с нечетными номерами делятся на многочлен $B_3 = x(2x-1)(x-1)$, т. е. 0, $\frac{1}{2}$, 1 являются их корнями.

5.5. Докажите, что знаки чисел Бернулли с нечетными номерами чередуются.

5.6. Докажите, что для многочленов Бернулли $B_n(x)$ выполняются равенства

а) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$;

б) $(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}$;

в) $\int\limits_a^x B_n(t)\,dt = \dfrac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)}{n+1}$.

5.7. Докажите, что многочлены Бернулли $B_n(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}} - 1} x^n$.

[Подсказка: проверьте, что операцию усреднения A можно определить равенством $A(f(x)) = \dfrac{e^{\frac{d}{dx}} - 1}{\frac{d}{dx}} f(x) = \dfrac{f(x)}{1!} + \dfrac{f'(x)}{2!} + \dfrac{f''(x)}{3!} + \ldots$.]

5.8. Обозначим через $a_{n,k}$ число путей в треугольнике Дика, состоящих из n звеньев, площадь под которыми равна k; $a_{2,1} = 1$, $a_{2,k} = 0$ при k четном. Докажите, что

$$A(s,\,t) = \sum a_{n,k} s^n t^k = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2 t}{1 - \cfrac{s^2 t^3}{1 - \cfrac{s^2 t^5}{1 - \ldots}}}}.$$

5.9. Докажите справедливость следующих разложений в непрерывные дроби:

а)

$$B(s) = \cfrac{s}{1 - \cfrac{1 \cdot 2s^2}{1 - \cfrac{2 \cdot 3s^2}{1 - \ldots - \cfrac{k(k+1)s^2}{1 - \ldots}}}},$$

где $B(s)$ — производящая функция для стороны Бернулли треугольника Бернулли—Эйлера;

б)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)!!s^{2n} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s^2}{1 - \cfrac{2s^2}{1 - \cfrac{3s^2}{1 - \ldots}}}},$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$;

в)

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n s^n = \cfrac{1}{1 - s - \cfrac{s^2}{1 - s - \cfrac{2s^2}{1 - s - \cfrac{3s^2}{1 - \dots}}}},$$

где I_n — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из n элементов, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 10$, $\dots$;

г)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! s^n = \cfrac{1}{1 - 2s - \cfrac{1 \cdot 2s^2}{1 - 4s - \cfrac{2 \cdot 3s^2}{1 - 6s - \cfrac{3 \cdot 4s^2}{1 - \dots}}}};$$

[Подсказка: Припишем к любой перестановке множества $\{1, \dots \dots, n+1\}$ слева и справа 0, а затем сопоставим каждому элементу $i = 1, \dots, n$ вектор в треугольнике Моцкина.]

д)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! s^n = \cfrac{1}{1 - s - \cfrac{1^2 s^2}{1 - 3s - \cfrac{2^2 s^2}{1 - 5s - \cfrac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

[Подсказка: Припишем к любой перестановке множества $\{1, \dots, n\}$ слева 0, а справа $n+1$, а затем сопоставим каждому элементу $i = 1, \dots, n$ вектор в треугольнике Моцкина.]

5.10. Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$h(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 s + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 s^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 s^3 + \dots$$

а) Докажите, что

$$s(1-s)h''(s) + (1-2s)h'(s) - \frac{1}{4}h(s) = 0.$$

б) Найдите асимптотику коэффициентов функции h.

5.11. Докажите, что степенной ряд

$$y(s) = 1 + \frac{2s}{1!} + \frac{6s^2}{2!} + \frac{20s^3}{3!} + \dots + \binom{2n}{n}\frac{s^n}{n!} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$sy'' + (1 - 4s)y' - 2y = 0.$$

5.12. Найдите несколько первых членов разложения по x решения y дифференциального уравнения

$$y' = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y.$$

5.13. Докажите, что функция $y(s) = \dfrac{\arcsin s}{(1 - s^2)^{1/2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - s^2)y' - sy = 1,$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

5.14. Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$e^{s^2} \int e^{-s^2/2},$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

5.15. Выпишите треугольник Бернулли—Эйлера $\mod 2$.

5.16. Докажите, что число неразложимых систем меандров (см. задачу 4.5) порядка p^m (где p — простое, $m \geqslant 1$) сравнимо с 2 по модулю p.

Глава 6

Разбиения и разложения

6.1. Разбиения и разложения

В первой главе, решая задачу про число счастливых билетов, мы уже изучали вопрос о числе представлений натурального числа n в виде суммы k слагаемых. Оставим в стороне ограничение на величину слагаемых (в задаче о числе счастливых билетов слагаемые были цифрами, поэтому их величина не должна была превышать 9). Найдем, сколькими способами можно представить число n в виде суммы неотрицательных слагаемых.

Два представления

$$n = a_1 + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_k$$

будем считать различными, если $a_i \neq b_i$ хотя бы для одного индекса i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Такое представление числа n будем называть его *разложением*.

Предложение 6.1. *Число различных разложений числа n в сумму k целых неотрицательных слагаемых равно* $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Доказательство. Представим себе число n в виде набора из n одинаковых шариков, лежащих на прямой. Каждому разложению числа n в сумму k слагаемых сопоставим расстановку $k-1$ палочки между шариками. Элемент a_i разложения равен числу шариков между палочками с номерами $i-1$ и i. Вместе палочки и шарики составляют $n+k-1$ предмет. При этом назначить $k-1$ предмет палочками можно ровно $\binom{n+k-1}{k-1}$ различными способами. Утверждение доказано. □

Несложно выписать и производящую функцию для числа разложений. По сути дела, мы уже сделали это в первой главе.

Предложение 6.2. *Производящая функция для числа разложений на k слагаемых имеет вид*

$$B_k(s) = (1-s)^{-k}.$$

Сложнее подсчитать число разбиений числа n. *Разбиением* мы будем называть класс эквивалентности разложений, ни одно из слагаемых в которых не равно нулю. При этом два разложения считаются эквивалентными, если одно можно получить из другого перестановкой слагаемых.

Вот все разбиения маленьких чисел:

$$\begin{aligned}
&n=1 \quad 1\\
&n=2 \quad 2=1+1\\
&n=3 \quad 3=2+1=1+1+1\\
&n=4 \quad 4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1\\
&n=5 \quad 5=4+1=3+2=3+1+1=\\
&\qquad\quad =2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что каждое разбиение в таблице записано в порядке убывания слагаемых: два разбиения, записанных в таком виде, легко сравнивать.

Обозначив число разбиений числа n через p_n, получаем таблицу начальных значений последовательности p_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22

Наша ближайшая задача — найти производящую функцию для последовательности p_n. Для этого подсчитаем сначала число разбиений на части, удовлетворяющие некоторым ограничениям. Пусть $P_1(s)$ — производящая функция для числа разбиений числа n на части, равные 1. Очевидно, что для каждого числа такое разбиение единственно, поэтому

$$P_1(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots = \frac{1}{1-s}.$$

Число разбиений числа n на части, равные 2, равно 1 для четных n и равно нулю в противном случае. Поэтому

$$P_2(s) = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + \ldots = \frac{1}{1-s^2}.$$

Число разбиений числа n на части, не превосходящие двух, тем самым, описывается производящей функцией

$$P_1(s)P_2(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)}.$$

Аналогично, числу разбиений n на части, равные трем, соответствует производящая функция $P_3(s) = 1/(1-s^3)$, а число его разбиений на части, не превосходящие трех, описывается производящей функцией

$$P_1(s)P_2(s)P_3(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)}.$$

Продолжая это рассуждение, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 6.3 (Эйлер). *Производящая функция для числа разбиений числа n имеет вид*

$$P(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)(1-s^4)\ldots}. \tag{6.1}$$

Для того, чтобы придать утверждению теоремы смысл, необходимо пояснить, что понимается под бесконечным произведением, стоящим в знаменателе правой части равенства (6.1). Это произведение должно быть формальным степенным рядом

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots \tag{6.2}$$

Для того, чтобы сказать, чему равны коэффициенты q_0, q_1, q_2, ... бесконечного произведения, посмотрим сначала на конечные произведения:

$$\begin{aligned}
1-s &= \mathbf{1-s} \\
(1-s)(1-s^2) &= \mathbf{1-s-s^2} + s^3 \\
(1-s)(1-s^2)(1-s^3) &= \mathbf{1-s-s^2} \qquad + s^4 + \ \ s^5 - s^6 \\
(1-s)\ldots(1-s^4) &= \mathbf{1-s-s^2} \qquad\qquad + 2s^5 + \ldots \\
(1-s)\ldots(1-s^5) &= \mathbf{1-s-s^2} \qquad\qquad + \ \ \boldsymbol{s^5} + \ldots
\end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты в этих конечных произведениях «стабилизируются» — начиная с некоторого момента перестают изменяться (стабилизирующиеся члены разложения выделены). Это и неудивительно: умножение на $1-s^k$ не меняет коэффициентов многочлена при степенях, меньших k. Поэтому мы можем просто положить q_k равным коэффициенту при s^k в многочлене $(1-s)(1-s^2)\ldots(1-s^k)$.

Теперь мы можем выписать аналогичные бесконечные произведения и для разбиений с различными ограничениями.

Так, число разбиений на различные слагаемые дается производящей функцией

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots,$$

производящая функция для разбиений на различные нечетные слагаемые имеет вид

$$(1+s)(1+s^3)(1+s^5)\dots,$$

а разбиения на произвольные нечетные слагаемые перечисляются производящей функцией

$$\frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots}, \quad \text{и т. д.}$$

Разбиения тесно связаны с алгеброй многочленов. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ от бесконечного числа переменных. Будем считать, что переменной x_i приписан вес i и что при перемножении переменных их веса складываются. Подсчитаем число мономов веса n, т. е. размерность пространства однородных многочленов веса n.

При $n=1$ такой моном всего один — это моном x_1. При $n=2$ имеется два монома веса n — это x_1^2 и x_2. Число мономов веса 3 равно трем, это x_1^3, x_1x_2 и x_3. Вообще, число мономов веса n равно p_n. Действительно, каждому моному веса n можно сопоставить разбиение числа n по следующему правилу: число слагаемых i в разбиении равно степени вхождения переменной x_i в моном. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Вот полезная геометрическая интерпретация разбиений. Каждое разбиение удобно представлять в виде *диаграммы Ферре* или *диаграммы Юнга* (см. рис. 6.1). Изображенные на этом рисунке диаграммы соответствуют разбиению $5+4+4+2+1$ числа 16. Каждая строчка диаграммы содержит столько элементов, каково соответствующее слагаемое разбиения.

Используя диаграммы Ферре или Юнга, можно доказывать различные свойства разбиений. Например, на диаграммах Юнга действует естественная инволюция — отражение относительно диагонали. Некоторые диаграммы при таком отражении переходят в себя (см. рис. 6.2). Такие диаграммы (и соответствующие им разбиения) будем называть *симметричными*.

Докажем следующее свойство симметричных разбиений.

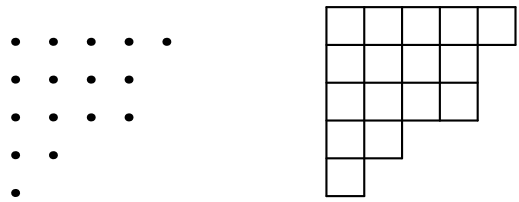


Рис. 6.1. Диаграммы а) Ферре и б) Юнга

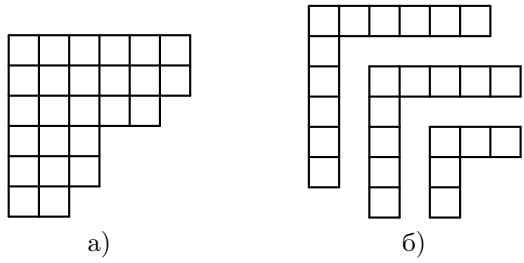


Рис. 6.2. а) Симметричная диаграмма Юнга; б) центральные крюки в ней

Предложение 6.4. *Число симметричных разбиений числа n равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые.*

Доказательство. Для доказательства поставим в соответствие каждой симметричной диаграмме диаграмму, составленную из ее «центральных крюков» (рис. 6.2 б)). Число клеток в каждом центральном крюке симметричной диаграммы нечетно, и эти числа попарно различны. Наоборот, взяв диаграмму, составленную из строк различной нечетной длины, мы можем «сломать» каждую такую строчку посередине и составить из получившихся крюков симметричную диаграмму. □

6.2. Тождество Эйлера

Производящая функция Q, задаваемая равенством (6.2), оказывается очень интересной. Эйлер продолжил вычисление ее коэффициентов и получил

$$Q(s) = 1 - s - s^2 + s^5 + s^7 - s^{12} - s^{15} + s^{22} + s^{26} - \\ - s^{35} - s^{40} + s^{51} + s^{57} - s^{70} - s^{77} + s^{92} + s^{100} - \dots$$

Видно, что среди коэффициентов в вычисленных членах встречаются только нули, единицы и минус единицы. Ненулевые коэффициенты стоят на некоторых вполне определенных местах и знаки при единицах попарно чередуются. Эти наблюдения привели Эйлера к гипотезе, которую мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6.5 (тождество Эйлера).

$$Q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(s^{\frac{3k^2-k}{2}} + s^{\frac{3k^2+k}{2}} \right).$$

Доказательство. При раскрытии скобок ряд

$$Q(s) = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots$$

содержит те же члены, что и ряд для числа разбиений с различными слагаемыми

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots$$

Однако некоторые члены при этом входят со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. Знак плюс имеют члены, соответствующие разбиениям на четное число слагаемых, а знак минус — члены, отвечающие разбиениям на нечетное число слагаемых. Мы докажем, что число разбиений числа n на четное и нечетное число слагаемых одинаково для всех значений n кроме некоторых исключительных.

Представим каждое разбиение в виде диаграммы Юнга. Важную роль в доказательстве будут играть нижняя строчка диаграммы и ее «боковая диагональ» (см. рис. 6.3).

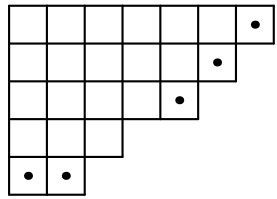


Рис. 6.3. Нижняя строчка и боковая диагональ диаграммы Юнга

Пусть l — длина нижней строчки, d — длина диагонали, k — число строчек в диаграмме, т. е. число слагаемых в разбиении. Определим отображение множества диаграмм, все строчки в которых имеют разную длину, в себя следующим образом:

если $l < d$, то отрежем от диаграммы нижнюю строчку и приклеим ее к диагонали;

если $l = d < k$, то проделаем то же самое;

если $l > d$ и $k > l$, то наоборот, отрежем диагональ и приклеим ее ниже нижней строчки.

С остальными (исключительными) диаграммами не будем делать ничего.

Наше отображение меняет четность числа строк в диаграмме, т. е. четность числа слагаемых в разбиении, для всех неисключительных диаграмм. Поэтому если исключительных диаграмм с числом клеток n нет вообще, то коэффициент при s^n в разложении $Q(s)$ равен нулю.

Исключительные диаграммы выделяются условиями

$$k = l = d \quad \text{или} \quad k = d,\ l = k + 1.$$

В первом случае имеем

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (2k-1) = \frac{3k^2 - k}{2};$$

во втором —

$$n = (k+1) + (k+2) + \ldots + 2k = \frac{3k^2 + k}{2}.$$

В каждом из этих случаев исключительная диаграмма единственна. Тождество Эйлера доказано. □

Тождество Эйлера дает эффективный способ вычисления числа разбиений числа n. Именно, справедливо следующее рекуррентное соотношение.

Предложение 6.6.

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - \ldots$$

Действительно, это очевидное следствие равенства

$$P(s)Q(s) = 1.$$

Полученное рекуррентное соотношение нашло замечательное применение в «линейке Фукса»[1].

«Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел p_n. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите

[1] Квант. 1981. № 8. С. 15.

лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3–4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке $+$, во второй $+$, в пятой $-$, в седьмой $-$, в двенадцатой $+$, в пятнадцатой $+$ и т. д., насколько хватит длины полоски. Оставшуюся часть листа также положите перед собой вертикально и, отступя 10–15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите известные вам числа p_n, начиная с p_0: 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это следующее значение функции p_n. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел p_n высотой в ваш лист».

6.3. Разбиения множеств и непрерывные дроби

Так же, как закрепление вершин многоугольника упрощает перечисление его триангуляций (см. раздел 2.5), так и разбиения множеств легче поддаются описанию, чем разбиения чисел.

Рассмотрим множество $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел от 1 до n. *Разбиением* множества N_n называется его представление в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств. Например, множество N_3 допускает пять разбиений:

$$\{\{1, 2, 3\}\},\ \{\{1, 2\}, \{3\}\},\ \{\{1, 3\}, \{2\}\},\ \{\{2, 3\}, \{1\}\},\ \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Число разбиений множества N_n обозначим через $\tilde{p}_n$ и займемся изучением производящей функции

$$\widetilde{P}(s) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_2 s^2 + \ldots$$

(мы полагаем, по определению, $\tilde{p}_0 = 1$).

Каждому разбиению множества N_n можно естественным образом сопоставить разбиение числа n. Для этого нужно представить n в виде суммы количеств элементов в каждом из множеств разбиения. Нетрудно подсчитать и число разбиений множества N_n, отвечающих данному разбиению

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

числа n. Элементы первого множества можно выбрать $\binom{n}{n_1}$ способами; после этого элементы второго множества можно выбрать $\binom{n-n_1}{n_2}$ способами и т. д. Всего разбить элементы множества N_n по множествам с n_1, n_2, …, n_k элементами можно

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \\ = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\dots\frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \\ = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$$

способами.

Полученное выражение называется *мультиномиальным коэффициентом*. Оно обобщает биномиальный коэффициент — число сочетаний. Как нетрудно видеть, мультиномиальный коэффициент представляет собой коэффициент при $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ в разложении многочлена $(x_1+\dots+x_k)^n$:

$$(x_1+\dots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\geqslant 0\\ n_1+\dots+n_k=n}}^{n}\binom{n}{n_1\dots n_k}x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}.$$

Однако число разбиений множества N_n, отвечающих данному разбиению числа n, не совпадает в точности с мультиномиальным коэффициентом. Дело в том, что множества разбиения, содержащие одинаковое количество элементов, можно переставлять между собой. Поэтому правильный ответ имеет вид

$$\frac{1}{m_1!\dots m_n!}\binom{n}{n_1\dots n_k},$$

где m_i — это число элементов разбиения, равных i.

Каждому разбиению множества N_n на подмножества сопоставим путь в треугольнике Моцкина по следующему правилу. Пусть элемент $i\in N_n$ входит в некоторое подмножество разбиения. Тогда i-й отрезок пути будет горизонтальным, если либо соответствующее подмножество состоит из одного элемента i, либо элемент i не является в подмножестве ни минимальным, ни максимальным элементом. i-й отрезок пути будет вектором подъема $(1, 1)$, если элемент i — минимальный в своем подмножестве, и он будет вектором спуска $(1, -1)$, если соответствующий элемент максимален. Начальная точка пути

находится, как обычно, в точке (0, 0). На рис. 6.4 изображены разбиение множества N_{10} и путь в треугольнике Моцкина, соответствующий этому разбиению.

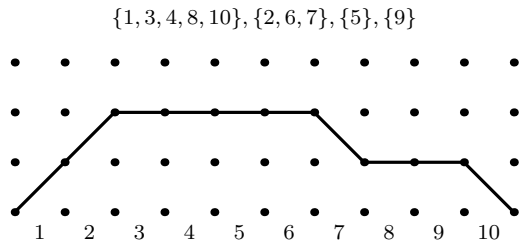


Рис. 6.4. Путь в треугольнике Моцкина, отвечающий разбиению множества

Ясно, что для каждого разбиения путь, отвечающий ему, является правильным: он лежит в положительной полуплоскости и заканчивается на высоте 0. Действительно, среди первых m элементов множества N_n число максимумов не может превосходить числа минимумов ни при каком m, а при $m = n$ числа максимумов и минимумов совпадают.

Подсчитаем, сколько разбиений соответствует данному пути. Пусть начальная часть пути, состоящая из i отрезков, заканчивается на высоте j, и предположим, что первые j элементов уже разбиты на подмножества. Если $(j+1)$-й отрезок пути представляет собой вектор подъема (1, 1), то элемент $j+1$ является минимумом нового подмножества разбиения, никаких других возможностей нет. Поэтому кратность соответствующего ребра равна 1. Если это горизонтальный вектор, то отвечающий ему элемент может либо входить в одно из уже существующих множеств (таких возможностей ровно j, так как ровно в j имеющихся множествах еще не зафиксирован максимальный элемент), либо образовывать одноэлементное множество. Поэтому кратность горизонтального ребра равна $j+1$. Кратность вектора спада $(1, -1)$ равна j, так как соответствующий ему элемент может быть максимальным в одном из j подмножеств. Соответствующая расстановка кратностей на ребрах в треугольнике Моцкина изображена на рис. 6.5.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

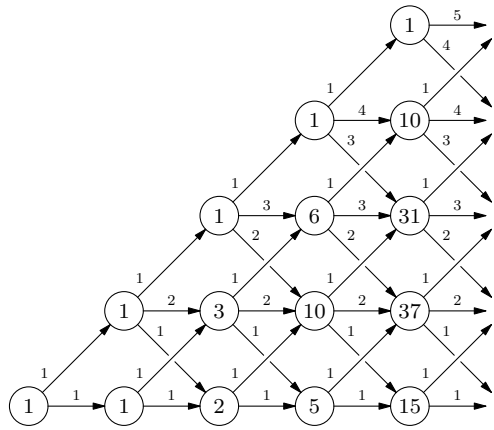


Рис. 6.5. Расстановка кратностей на ребрах, отвечающая производящей функции разбиений

Теорема 6.7. *Число $\tilde{p}_n$ разбиений множества N_n на непустые подмножества равно числу правильных путей длины n в треугольнике Моцкина с кратностями, изображенном на рис.* 6.5.

Из доказанной теоремы и теоремы 5.7 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.8. *Производящая функция $\tilde{P}(s)$ для числа разбиений множества N_n раскладывается в непрерывную дробь*

$$\tilde{P}(s) = \cfrac{1}{1 - s - \cfrac{s^2}{1 - 2s - \cfrac{2s^2}{1 - 3s - \cfrac{3s^2}{1 - \dots}}}}.$$

6.4. Задачи

6.1. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты в 1, 5, 10 и 50 копеек?

6.2. Сколькими способами можно взвесить 78 г с помощью разновесок 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 г на

а) одночашечных весах;

б) двухчашечных весах?

(Применение двух различных разновесок одного веса дает различные взвешивания.)

6.3. Всякое число может быть единственным образом записано в десятичной системе счисления. Поэтому

$$(1+s+s^2+\ldots+s^9)(1+s^{10}+\ldots+s^{90})\ldots=\frac{1}{1-s}.$$

Докажите.

6.4. Докажите, что

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots=\frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\ldots}.$$

6.5. Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столькими же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечетных (может быть и совпадающих) слагаемых.

6.6. Докажите тождества Гаусса:

а)

$$\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots}=1-2s+2s^4-2s^9+\ldots;$$

б)

$$\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\ldots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\ldots}=1+s+s^3+s^6+s^{10}+\ldots$$

6.7. Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1}-1$ способами, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными. Например, у числа 4 семь представлений:

$$4=3+1=1+3=2+2=2+1+1=1+2+1=1+1+2=1+1+1+1.$$

6.8. Найдите производящую функцию для числа симметричных разбиений.

6.9. Рассмотрим кольцо многочленов от бесконечного набора переменных, в котором переменным приписан вес, причем число переменных веса i конечно для любого i. Обозначим это число через q_i. Выпишите производящую функцию для последовательности размерностей пространств однородных многочленов веса n.

6.10. Обозначим через σ_n сумму делителей числа n (включая 1 и само n); например, $\sigma_6=1+2+3+6=12$. Пусть $\Sigma(s)$ — производящая функция для последовательности σ_n,

$$\Sigma(s)=s+3s^2+4s^3+7s^4+6s^5+12s^6+\ldots$$

а) Докажите, что

$$\Sigma(s)P(s) = sP'(s),$$

где $P(s)$ — производящая функция для числа разбиений.

б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа σ_n.

6.11. Докажите, что последовательность p_n чисел разбиений растет монотонно и оцените скорость ее роста.

6.12. Докажите, что производящая функция для числа диаграмм Юнга по полупериметру равна $\dfrac{x^2}{1-2x}$.

6.13. Докажите, что

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k \geqslant 1} \min(n_1, n_2, \ldots, n_k) t_1^{n_1} t_2^{n_2} \ldots t_k^{n_k} =$$

$$= \frac{t_1 t_2 \ldots t_k}{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_k)(1-t_1 t_2 \ldots t_k)}.$$

6.14. Выпишите непрерывную дробь для производящей функции $Q(s, t)$, коэффициент $q_n(t) = q_{n,n}t^n + q_{n,n-1}t^{n-1} + \ldots + q_{n,1}t$ при s^n для которой есть производящий многочлен чисел $q_{n,k}$ разбиений множества N_n на k непустых подмножеств.

Глава 7

Производящие функции Дирихле и формулы включения-исключения

7.1. Принцип включения-исключения

Обратимся к очень простой общей теореме формальной логики.

Пусть B — какое-либо конечное множество, элементы которого могут обладать некоторыми из свойств $c_1, \ldots, c_m$. Обозначим через $N(c_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, число элементов множества B, обладающих свойством c_i, через $N(c_i, c_j)$, $i \neq j$, — число элементов множества B, обладающих одновременно двумя свойствами c_i, c_j, и т. д. Пусть также $N(1)$ — общее число элементов в множестве B.

Теорема 7.1 (принцип включения-исключения). *Число элементов в множестве B, не обладающих ни одним из свойств c_i, $i = 1, \ldots, m$, равно*

$$N(1) - N(c_1) - \ldots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \ldots - N(c_1, c_2, c_3) - \ldots$$

Доказательство. Разобьем все элементы множества B на группы: $B = B_0 \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_m$, причем подмножество B_l состоит из элементов, обладающих ровно l свойствами. Рассмотрим последовательно выражения

$$\begin{gathered} N(1), \\ N(1) - N(c_1) - \ldots - N(c_m), \\ N(1) - N(c_1) - \ldots - N(c_m) + N(c_1, c_2) + \ldots + N(c_{m-1}, c_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Сопоставим каждому из этих выражений расстановку чисел на множествах B_l. Первое выражение соответствует присвоению каждой группе кратности 1 — мы учли все элементы по одному разу. Второму

выражению соответствует присвоение множеству B_l кратности $1-l$, так как при вычитании мы учли каждый его элемент ровно l раз. Третье выражение сопоставляет множеству B_l кратность $1-l+\binom{l}{2}$, и т. д. Таким образом, переход от выражения с номером l к выражению с номером $l+1$ не меняет кратности множеств $B_0, \ldots, B_l$. Эти кратности равны

$$\binom{l}{0}-\binom{l}{1}+\binom{l}{2}-\ldots+(-1)^l\binom{l}{l},$$

что равно нулю для всех l кроме $l=0$, откуда и вытекает теорема. □

Принцип включения-исключения легко запомнить с помощью следующего простого мнемонического правила. Пусть 1 соответствует объектам, обладающим всеми свойствами, $1-c_i$ — выражение для объектов, не обладающих свойством c_i. Тогда выражение для объектов, не обладающих ни одним из свойств $c_1, \ldots, c_m$, будет иметь вид

$$(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_m),$$

откуда, раскрывая скобки, получаем

$$(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_m)=1-c_1-\ldots-c_m+c_1c_2+\ldots-c_1c_2c_3-\ldots$$

Применим принцип включения-исключения для нахождения числа счастливых билетов. Заметим, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой 27. Действительно, пусть билет $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$ — счастливый. Сопоставим ему билет $a_1b_1c_1(9-a_2)(9-b_2)(9-c_2)$, сумма цифр которого равна 27. Это соответствие, очевидно, взаимнооднозначно.

Рассмотрим теперь множество всевозможных расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шести позициях и введем шесть свойств таких расстановок. Свойство c_i состоит в том, что число в i-й позиции не меньше 10. Число счастливых билетов равно числу расстановок, не обладающих ни одним из свойств $c_1, \ldots, c_6$.

Число $N(1)$ всех расстановок неотрицательных целых чисел с суммой 27 в шесть позиций равно $\binom{32}{5}$. Число $N(c_i)$ расстановок, удовлетворяющих свойству c_i, одинаково для всех i и равно $\binom{22}{5}$. Действительно, мы можем поставить в i-ю позицию число 10, а оставшуюся сумму 17 произвольно распределить по шести позициям.

Аналогично число расстановок, удовлетворяющих одновременно двум свойствам c_i и c_j, одинаково для любой пары свойств и равно

$\binom{12}{5}$: мы ставим число 10 в i-ю и j-ю позиции, а оставшуюся сумму 7 произвольным образом распределяем по шести позициям. Число же расстановок, удовлетворяющих одновременно трем и более свойствам, равно нулю, так как общая сумма всех чисел меньше 30. Таким образом, общее число расстановок, не удовлетворяющих ни одному из свойств c_i, а, значит, и общее число счастливых билетов, дается следующим предложением.

Предложение 7.2. *Число счастливых билетов равно*

$$\binom{32}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5}.$$

Решим с помощью принципа включения-исключения еще одну задачу, имеющую большое число приложений.

Перестановка π элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется *беспорядком*, если $\pi(k) \neq k$ ни при каких $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через d_n число беспорядков на множестве из n элементов. Вот начало таблицы чисел беспорядков:

n	0	1	2	3	4
d_n	1	0	1	2	9

Чтобы подсчитать число беспорядков, введем n свойств перестановок на множестве из n элементов. Свойство c_i состоит в том, что перестановка оставляет на месте элемент i. Число всех перестановок равно $n!$. Число перестановок, удовлетворяющих свойству c_i, равно $(n-1)!$: мы фиксируем i-й элемент перестановки, а остальные переставляются произвольно. Число перестановок, удовлетворяющих двум свойствам c_i и c_j, равно $(n-2)!$: два элемента перестановки фиксируются, остальные переставляются произвольно. Вообще, число перестановок, удовлетворяющих m свойствам, равно $(n-m)!$. Таким образом, мы приходим к следующей формуле.

Предложение 7.3. *Число беспорядков на множестве из n элементов равно*

$$d_n = \binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots = \\ = n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\Big).$$

При $n \to \infty$ выражение в скобках стремится, как хорошо известно, к e^{-1}. Таким образом, беспорядки составляют приблизительно e-ую часть всех перестановок.

7.2. Производящие функции Дирихле и действия над ними

Рассматривавшиеся нами ранее производящие функции относились к классу степенных рядов. Однако в мультипликативной теории чисел большее применение находят производящие функции Дирихле. Самой известной среди них является *дзета-функция Римана*

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \tag{7.1}$$

Общая же *производящая функция Дирихле*, отвечающая последовательности a_1, a_2, a_3, ..., имеет вид

$$\frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots$$

Дзета-функция Римана отвечает последовательности 1, 1, 1, ... Она играет для производящих функций Дирихле такую же роль, как геометрическая прогрессия для обыкновенных производящих функций и экспонента для экспоненциальных производящих функций. Обратите внимание на то, что нумерация коэффициентов производящих функций Дирихле начинается с единицы, а не с нуля, как это было в случае обыкновенных производящих функций.

Причиной, обуславливающей введение производящих функций Дирихле, служит их поведение относительно умножения: при перемножении двух функций $A(s) = \sum a_n n^{-s}$ и $B(s) = \sum b_n n^{-s}$ мы получаем функцию

$$A(s)B(s) = \frac{a_1 b_1}{1^s} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2^s} + \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{3^s} + \frac{a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1}{4^s} + \dots$$
$$\dots = \sum_n \frac{\sum\limits_{kl=n} a_k b_l}{n^s},$$

где внутреннее суммирование ведется по всем разложениям числа n в произведение двух сомножителей. Таким образом, использование производящих функций Дирихле позволяет контролировать мультипликативную структуру натуральных чисел. Отметим, что сложение таких производящих функций соответствует обычному почленному сложению последовательностей.

Роль единицы при умножении производящих функций Дирихле играет функция $1 = 1^{-s}$. Любая производящая функция Дирихле $A(s)$ с ненулевым свободным членом, $a_1 \neq 0$, обратима: существует функция

$B(s)$, такая что $A(s)B(s)=1$. Построим обратную функцию для дзета-функции Римана.

Теорема 7.4. *Обратная функция для дзета-функции Римана имеет вид*

$$M(s)=\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{n^s},$$

где

$$\mu_n=\begin{cases}(-1)^{t_n} & \text{где } t_n \text{ — число простых делителей числа } n,\\ & \text{если в разложении } n \text{ на простые множители}\\ & \text{нет повторяющихся множителей;}\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Последовательность μ_n мы будем называть *последовательностью Мёбиуса*, а функцию $M(s)$ — *функцией Мёбиуса*.

Доказательство. Для доказательства перемножим функции $\zeta(s)$ и $M(s)$. Коэффициент при n^{-s}, $n>1$ в произведении будет равен

$$\binom{t_n}{0}-\binom{t_n}{1}+\ldots+(-1)^{t_n}\binom{t_n}{t_n}=0.$$

Действительно, пусть разложение n на простые множители имеет вид $n=p_1^{k_1}\ldots p_t^{k_t}$, где $t=t_n$. Тогда коэффициент при m^{-s} функции $M(s)$ участвует в произведении с ненулевым коэффициентом в том и только в том случае, если m является произведением некоторого подмножества множества простых чисел $p_1,\ldots,p_t$. Число таких подмножеств из k элементов равно $\binom{t}{k}$, а знак соответствующего коэффициента при m^{-s} равен $(-1)^k$.

Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.5. *Пусть f_n, g_n — две последовательности, такие что*

$$f_n=\sum_{t|n}g_t, \tag{7.2}$$

где суммирование ведется по всем делителям t числа n. Тогда элементы последовательности g_n выражаются через элементы последовательности f_n по правилу

$$g_n=\sum_{t|n}\mu_{n/t}f_t. \tag{7.3}$$

Доказательство. Действительно, равенство (7.2) означает, что

$$F(s) = \zeta(s)G(s),$$

где $F(s)$ (соотв., $G(s)$) — это производящая функция Дирихле для последовательности чисел f_n (соотв., g_n). Умножая обе части последнего равенства на $M(s)$, получаем

$$M(s)F(s) = M(s)\zeta(s)G(s) = G(s),$$

что и составляет содержание равенства (7.3). Следствие доказано. □

Существование и единственность разложения натурального числа на простые множители позволяют найти представление дзета-функции в виде произведения (и, соответственно, еще одно представление функции Мёбиуса).

Предложение 7.6.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}}\frac{1}{1-3^{-s}}\frac{1}{1-5^{-s}}\frac{1}{1-7^{-s}}\dots,$$
$$M(s) = (1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})(1-7^{-s})\dots,$$

где произведения берутся по всем простым числам.

7.3. Обращение Мёбиуса

Формула суммы геометрической прогрессии, формула включения-исключения 7.1, теорема 7.4 и формула обращения Эйлера (6.1) являются проявлениями одного простого общего принципа, называемого принципом обращения Мёбиуса.

Этот принцип позволяет находить обратную функцию к дзета-функции в широком классе ситуаций.

А именно, пусть s_1, s_2, … — набор (возможно бесконечный) переменных, и мы рассматриваем алгебру степенных рядов от этих переменных. Определим *дзета-функцию* данной алгебры как сумму всех мономов в этой алгебре, взятых с коэффициентом единица. Так, геометрическая прогрессия

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

является дзета-функцией алгебры степенных рядов от одной переменной. Функция, обратная дзета-функции, является *функцией Мёбиуса* алгебры. Она представляет собой сумму мономов алгебры, взятых

с некоторыми коэффициентами, которые мы фактически уже вычислили в теореме 7.4.

Теорема 7.7. *Коэффициент при мономе* $s_{i_1}^{n_1} \dots s_{i_m}^{n_m}$ *в функции Мёбиуса алгебры степенных рядов от переменных* $s_1, s_2, \dots$ *равен нулю, если какая-нибудь из переменных входит в моном со степенью, большей* 1 ($n_i > 1$ *для какого-нибудь* i), *и он равен* $(-1)^m$, *если все* m *переменных входят в моном в первой степени.*

Доказательство. Можно провести доказательство теоремы, повторив, практически дословно, доказательство теоремы 7.4. Мы, однако, предпочтем несколько другой путь. Дело в том, что мы попросту знаем обратную функцию для дзета-функции. Действительно, сама дзета-функция является произведением дзета-функций от каждой из переменных $s_1, s_2, \dots$. Поэтому она представляет собой произведение геометрических прогрессий

$$(1 + s_1 + s_1^2 + s_1^3 + \dots)(1 + s_2 + s_2^2 + s_2^3 + \dots)\dots$$

(Заметим, что коэффициент при каждом мономе является суммой *конечного* числа *конечных* произведений.) Поэтому обратная к ней функция Мёбиуса представляет собой не что иное, как произведение

$$(1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3)\dots,$$

откуда утверждение теоремы следует мгновенно.

Теорема доказана. □

Посмотрим, как применяется эта теорема. Чтобы вывести из нее теорему 7.4, рассмотрим набор переменных $s_2, s_3, s_5, s_7, \dots$ (каждому простому числу отвечает одна переменная, в которой это число служит индексом). Тогда алгебра функций Дирихле изоморфна алгебре степенных рядов от указанного набора переменных: элементу n^{-s}, где $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ — разложение числа n на простые множители, отвечает моном $s_{p_1}^{k_1} \dots s_{p_m}^{k_m}$ алгебры степенных рядов. Легко видеть, что это соответствие действительно задает изоморфизм алгебр. Теорема 7.4 теперь непосредственно вытекает из теоремы 7.7 (ср. предложение 7.6).

Принцип включения-исключения можно вывести из теоремы 7.7 следующим способом. Рассмотрим алгебру многочленов, порожденных переменными $s_1, \dots, s_n$ (каждая переменная отвечает одному рассматриваемому свойству), *срезанных по степени два.* Это означает, что мы приравниваем нулю всякий моном в алгебре, если какая-нибудь переменная входит в него в степени выше, чем первая. Моном $s_{i_1} \dots s_{i_m}$ в такой алгебре отождествляется с подмножеством

$\{i_1, \ldots, i_m\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$. Формула включения-исключения есть не что иное, как формула для функции Мёбиуса этой алгебры.

Столь же простой оказывается и ситуация с формулой обращения производящей функции для числа разбиений. Сопоставим каждому разбиению $n = n_1 + \ldots + n_m$ моном $s_{n_1} s_{n_2} \ldots s_{n_m}$ (если некоторые части в разбиении повторяются, то степень соответствующей переменной в мономе равна числу этих частей). Функция Мёбиуса в этой алгебре, как мы знаем, имеет вид

$$(1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) \ldots$$

При подстановке $s_n = s^n$ дзета-функция алгебры превращается в производящую функцию для числа разбиений (действительно, коэффициент при мономе s^n в полученной функции равен числу всех разбиений числа n). Обратная к ней функция Мёбиуса переходит при этом в функцию

$$(1 - s)(1 - s^2)(1 - s^3) \ldots,$$

что и дает равенство (6.2).

7.4. Мультипликативные последовательности

Помимо дзета-функции и функции Мёбиуса в теории чисел большую роль играют и другие производящие функции Дирихле, отвечающие другим числовым последовательностям. Наиболее важными из них оказываются мультипликативные числовые последовательности.

Определение 7.8. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называется *мультипликативной*, если для всех взаимно простых пар индексов m, n выполняется равенство $a_m a_n = a_{m \cdot n}$.

Заметим, что если в мультипликативной последовательности $a_1 = 0$, то эта последовательность состоит из одних нулей. Действительно, $a_n = a_{1 \cdot n} = a_1 a_n = 0$ для любого числа n. Это же рассуждение показывает, что если $a_1 \neq 0$, то $a_1 = 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать только ненулевые мультипликативные последовательности.

Последовательность $1, 0, 0, 0, \ldots$ мультипликативна. Последовательность, состоящая из одних единиц, тоже, очевидно, мультипликативна. Последовательность Мёбиуса также мультипликативна, что вытекает, например, из теоремы 7.4. Приведем еще несколько примеров.

Пример 7.9. Обозначим через τ_n число делителей числа n. Производящая функция Дирихле для последовательности τ_n, очевидно, имеет вид

$$\tau(s) = \frac{\tau_1}{1^s} + \frac{\tau_2}{2^s} + \ldots = \zeta^2(s).$$

Если числа m и n взаимно просты, то число делителей их произведения mn равно произведению $\tau_m\tau_n$: если p — делитель числа m, а q — делитель числа n, то pq — делитель их произведения mn, причем каждый делитель произведения можно представить в таком виде единственным способом. Поэтому последовательность τ_n мультипликативна.

Пример 7.10. Если через ν_n обозначить число различных простых множителей числа n, то последовательность $a_n = a^{\nu_n}$ оказывается мультипликативной для любого числа a.

Все мультипликативные последовательности определяются своими элементами, индексы которых равны степеням простых чисел. Другими словами, для мультипликативных последовательностей имеет место аналог утверждения 7.6.

Предложение 7.11. *Последовательность $\{a_i\}$ является мультипликативной тогда и только тогда, когда соответствующая ей производящая функция Дирихле представляется в виде*

$$\left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_4}{4^s} + \ldots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_3}{3^s} + \frac{a_9}{9^s} + \ldots\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{a_5}{5^s} + \ldots\right)\ldots, \quad (7.4)$$

где произведение берется по всем простым числам.

Из этого утверждения немедленно вытекает замечательное свойство мультипликативных последовательностей, обобщающее утверждение о мультипликативности последовательности Мҷбиуса.

Следствие 7.12. *Если производящие функции Дирихле $A(s)$ и $B(s)$ отвечают мультипликативным последовательностям, то последовательности коэффициентов их произведения $A(s)B(s)$ и частного $A(s)/B(s)$ также мультипликативны. Другими словами, производящие функции Дирихле, отвечающие ненулевым мультипликативным числовым последовательностям, образуют группу по умножению.*

Действительно, если каждая из функций $A(s)$, $B(s)$ обладает представлением (7.4), то таким же представлением обладают их произведение и частное. Само же утверждение 7.11 немедленно следует из определения мультипликативной последовательности.

7.5. Задачи

7.1. Найдите с помощью формулы включения-исключения площадь сферического треугольника с углами α, β, γ на сфере единичного радиуса.

7.2. Найдите с помощью принципа включения-исключения формулу для числа счастливых билетов с номерами из $2r$ цифр, записанными в системе счисления с основанием q.

7.3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — различные простые множители числа $n = a_1^{p_1} \ldots a_k^{p_k}$. Докажите, что число φ_n чисел, меньших n и взаимно простых с ним, равно

$$\varphi_n = n\Big(1 - \frac{1}{a_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{a_2}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{a_k}\Big).$$

7.4. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что последовательность φ_n мультипликативна.

7.5. Докажите, что число различных правильных замкнутых n-угольников (в том числе самопересекающихся) вписанных в единичную окружность равно $\varphi_n/2$.

7.6. Сколько несократимых дробей имеется среди n^2 дробей

$$\begin{array}{lllll} 1/1, & 1/2, & 1/3, & \ldots, & 1/n \\ 2/1, & 2/2, & 2/3, & \ldots, & 2/n \\ \multicolumn{5}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ n/1, & n/2, & n/3, & \ldots, & n/n? \end{array}$$

7.7. Докажите, что число беспорядков на множестве из n элементов — ближайшее целое число к $n!/e$.

7.8. Пусть диагональные элементы в $n \times n$ матрице равны нулю. Подсчитайте число ненулевых элементов в разложении определителя этой матрицы.

7.9. Докажите, что экспоненциальная производящая функция для последовательности чисел беспорядков имеет вид $D(s) = e^{-s}/(1-s)$.

7.10. Пусть μ_n — последовательность Мцбиуса. Тогда

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^n)^{-\mu_n/n} = e^x.$$

7.11. Опишите все идеалы в алгебре функций Дирихле.

7.12. Докажите следующую формулу:

$$\max(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n - \min(a_1, a_2) - \ldots$$
$$\ldots - \min(a_{n-1}, a_n) + \min(a_1, a_2, a_3) + \ldots + (-1)^{n-1}\min(a_1, \ldots, a_n).$$

7.13. Положим $\lambda_n = (-1)^k$, где k — число простых множителей числа n (считаемых с учетом кратности). Докажите, что последовательность λ_n мультипликативна.

7.14. Найдите функцию Дирихле $\zeta(s)\lambda(s)$, где коэффициенты функции $\lambda(s)$ определены в предыдущей задаче.

7.15. Обозначим через $\sigma_\alpha(n)$ сумму α-х степеней делителей числа n, $\sigma_\alpha(n) = \sum\limits_{t|n} t^\alpha$ (α — целое неотрицательное число). Докажите, что производящая функция Дирихле для этой последовательности имеет вид

$$\Sigma_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha).$$

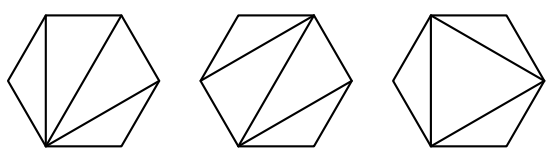
Глава 8

Перечисление деревьев

Настоящая глава посвящена некоторым геометрическим аспектам комбинаторики, в том числе наиболее активно развивающимся в последние годы. Эти задачи связаны с графами и их вложениями в различные поверхности. На протяжении всей главы широко используется обозначение $[s^k]f(s)$ для коэффициента f_k в производящей функции $f(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots$

8.1. Перечисление помеченных деревьев

Ряд трудностей в задачах перечисления обязан своим происхождением тому, что перечисляемые объекты имеют различные *симметрии*. Так, например, если бы мы решили считать одинаковыми диагональные триангуляции правильных многоугольников (см. раздел 2.5), переходящие друг в друга при повороте, получение точной формулы превратилось бы в сложную задачу, да и сама формула вряд ли бы значительно продвинула нас в понимании природы триангуляций. Причина такого явления кроется в том, что различные триангуляции допускают различные группы симметрий. Все шесть поворотов триангуляции шестиугольника, изображенной на рис. 8.1а) дают различный



а) б) в)

Рис. 8.1. Три диагональные триангуляции шестиугольника с различными симметриями

результат, в то время как повороты триангуляции, приведенной на рис. 8.1 б), приводят лишь еще к двум новым триангуляциям, а на рис. 8.1 в) — к одной.

В то же время явная формула, сводящая число диагональных триангуляций многоугольника *с перенумерованными вершинами* к числу Каталана, дает хорошую оценку на асимптотику числа триангуляций многоугольника с ненумерованными вершинами. Действительно, число триангуляций, рассматриваемых с точностью до поворота $(n+2)$-угольника, не превосходит $c_n \sim \mathrm{const} \cdot 4^n \cdot n^{-3/2}$, и оно не меньше, чем $c_n/(n+2) \sim \mathrm{const} \cdot 4^n \cdot n^{-5/2}$. Таким образом нарушение симметрии — перенумерация вершин многоугольника — привело к серьезному упрощению задачи и лишь незначительно повлияло на точность ответа. Тот же прием — маркировка — оказывается весьма эффективным и во многих других перечислительных задачах. Мы увидим сейчас, как он используется при перечислении деревьев.

Определение 8.1. *Графом* будем называть тройку $\Gamma = \{V, E, I\}$, состоящую из конечного множества *вершин* V, конечного множества *ребер* E и *отображения инцидентности* $I\colon E \to V \times V$, сопоставляющего каждому ребру пару вершин (*концы ребра*), которые это ребро соединяет. Ребро называется *петлей*, если его концы совпадают. *Валентностью* вершины графа называется число ребер, для которых данная вершина является концом (при подсчете валентности петля считается за два ребра).

Граф обычно изображается на плоскости; вершинам графа соответствуют точки на плоскости, ребрам — отрезки дуг, соединяющие эти точки (см. рис. 8.2, жирными точками обозначены вершины графа, дугами — его ребра. Не выделенные точки пересечения ребер не являются вершинами).

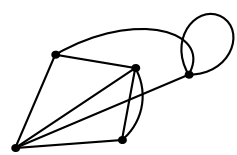


Рис. 8.2. Изображение графа на плоскости.

Замечание 8.2. 1. На самом деле, графом естественно считать не определенный выше объект, а класс эквивалентности таких объектов. Две тройки $\Gamma_1 = \{V_1, E_1, I_1\}$ и $\Gamma_2 = \{V_2, E_2, I_2\}$ называются *эквивалентными*, если существуют взаимно однозначные отображения $v\colon V_1 \to V_2$ и $e\colon E_1 \to E_2$, такие что $I_2 \circ e = (v \times v) \circ I_1$. В дальнейшем мы фактически будем использовать именно это определение.

2. У приведенного определения имеются варианты. Например, иногда естественно требовать, чтобы через каждую пару вершин графа

проходило не более одного ребра, т. е. чтобы отображение инцидентности было инъективным. Иногда в графе запрещаются петли и т. д. Мы будем всякий раз оговаривать подобные ограничения.

3. С топологической точки зрения граф представляет собой *одномерный комплекс*. Если на каждом ребре графа ввести *ориентацию* (т. е. указать направление этого ребра), то *граница ребра* — это разность конечной и начальной вершин.

Определение 8.3. Две вершины графа называются *соседними*, если существует ребро, которое их соединяет. Граф называется *связным*, если для любой пары u, $v \in V$ его вершин существует последовательность $v_0 = u$, v_1, ..., $v_k = v \in V$ вершин графа, в которой вершины v_{i-1} и v_i соседние для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. *Циклом* называется последовательность v_0, v_1, ..., $v_k \in V$ вершин графа, в которой вершины v_{i-1} и v_i соседние для всех $i = 1, 2, \ldots, k$, все вершины v_0, v_1, ..., v_{k-1} попарно различны и $v_0 = v_k$. *Деревом* называется связный граф без циклов.

На рис. 8.3 приведены все деревья с n вершинами ($n \leqslant 5$).

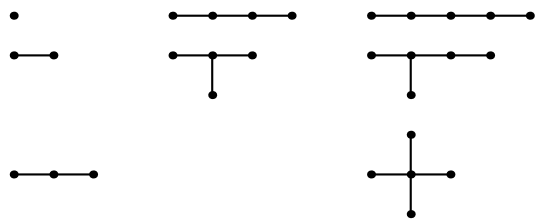


Рис. 8.3. Деревья с n вершинами ($n \leqslant 5$)

Задача перечисления деревьев с n вершинами — сложная перечислительная задача, поскольку различные деревья имеют различную симметрию. Мы займемся более простой задачей — перечислением деревьев с помеченными вершинами. Сопоставим каждой вершине дерева одно из чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы разным вершинам соответствовали разные числа. На рис. 8.4 изображены все помеченные деревья с $n \leqslant 4$ вершинами. Последовательность чисел помеченных деревьев с n вершинами начинается так: 1, 1, 3, 16, ...

Обозначим через T_n число корневых помеченных деревьев с n вершинами, т. е. число помеченных деревьев, в которых одна из вершин выделена и названа *корнем*. Ясно, что число корневых помеченных деревьев с n вершинами в n раз больше числа помеченных деревьев

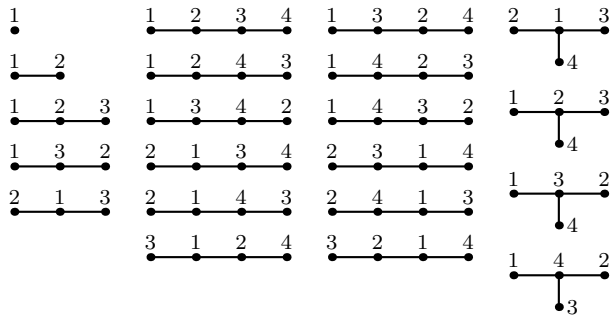


Рис. 8.4. Помеченные деревья с n вершинами ($n \leqslant 4$)

с n вершинами: в качестве корня можно выбрать любую из n различных вершин.

Попробуем найти экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n s^n = \frac{1}{1!} s + \frac{2}{2!} s^2 + \frac{9}{3!} s^3 + \frac{64}{4!} s^4 + \ldots$$

для числа корневых помеченных деревьев. Выкинем из дерева корень. Тогда оно распадется на несколько деревьев, число которых равно валентности корня. Новые деревья тоже можно считать помеченными: требуется лишь заменить пометки $\{l_1, \ldots, l_i\}$, $l_1 < \ldots < l_i$, на пометки $\{1, \ldots, i\}$, сохраняя их относительный порядок. Корнем нового дерева будем считать вершину, соединенную с корнем исходного дерева. Тем самым каждому корневому помеченному дереву с корнем валентности k сопоставлено (мульти)множество из k корневых помеченных деревьев. Мы говорим о мультимножествах, так как среди вновь образованных деревьев могут встречаться одинаковые.

Из приведенного описания вытекает, что деревья с корнем валентности k перечисляются экспоненциальной производящей функцией $s\mathcal{T}^k(s)$. Действительно, вклад в коэффициент при s^{n+1} в функции $s\mathcal{T}^k(s)$ дают в точности элементы вида

$$\frac{T_{l_1}}{l_1!} \cdots \frac{T_{l_k}}{l_k!} s^{l_1 + \ldots + l_k},$$

для которых $l_1 + \ldots + l_k = n$. Множество пометок n вершин k деревьев можно разбить на k подмножеств из $l_1, \ldots, l_k$ пометок $\dfrac{n!}{l_1! \ldots l_k!}$ способами. Поэтому число помеченных корневых деревьев из $n+1$

вершины с корнем валентности k равно

$$n![s^n]\mathcal{T}^k(s) = \sum_{l_1+\ldots+l_k=n} \frac{n!}{l_1!\ldots l_k!} T_{l_1}\ldots T_{l_k}.$$

Суммируя функции $\frac{1}{k!}\mathcal{T}^k$ по всем k, получаем следующее утверждение.

Теорема 8.4. *Экспоненциальная производящая функция $\mathcal{T}(s)$ для числа помеченных корневых деревьев, перечисляющая их по числу вершин, удовлетворяет уравнению Лагранжа*

$$\mathcal{T}(s) = se^{\mathcal{T}(s)}. \tag{8.1}$$

Теорема Лагранжа теперь позволяет нам легко вычислить коэффициенты функции $\mathcal{T}(s)$. Можно, например, подсчитать, что $T_5 = 625$, $T_6 = 7776$. Однако нам хотелось бы иметь явную формулу для их вычисления. Для получения этой формулы нам понадобится следующее уточнение теоремы Лагранжа.

Теорема 8.5. *Пусть функции $\varphi = \varphi(s)$ ($\varphi(0) = 0$) и $\psi = \psi(t)$ связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s)). \tag{8.2}$$

Тогда коэффициент при s^n в функции φ равен

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t).$$

Применим это уточнение к уравнению (8.1) на функцию $\mathcal{T}(s)$. Получим

$$T_n = n![s^n]\mathcal{T}(s) = n!\frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = (n-1)!\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}.$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 8.6 (Кэли). *Число помеченных корневых деревьев с n вершинами равно $T_n = n^{n-1}$.*

Следствие 8.7. *Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2}.*

Доказательство теоремы 8.5.

Лемма 8.8 (преобразование вычета при замене переменной). *Пусть функция $g(t)$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$. Тогда*

$$[s^{-1}]f(s) = [t^{-1}]f(g(t))g'(t).$$

Действительно, пусть $f(s) = f_{-N}s^{-N} + f_{-N+1}s^{-N+1} + \dots$, $g(t) = g_1 t + g_2 t^2 + \dots$ При $n \neq -1$

$$[t^{-1}]g^n(t)g'(t) = [t^{-1}]\frac{1}{n+1}(g^{n+1}(t))' = 0,$$

так как вычет производной любой функции равен нулю. При $n = -1$

$$[t^{-1}]f_{-1}\frac{1}{g(t)}g'(t) = f_{-1},$$

что и требовалось. □

Коэффициент при s^n в производящей функции φ равен

$$[s^n]\varphi(s) = [s^{-1}]s^{-n-1}\varphi(s).$$

Вычислим последний вычет с помощью леммы 8.8. Для этого перепишем уравнение Лагранжа (8.2) в виде подстановки

$$s = \frac{t}{\psi(t)},$$

где $t = \varphi(s)$. Тогда, согласно лемме,

$$[s^{-1}]s^{-n-1}\varphi(s) = [t^{-1}]\frac{\psi^{n+1}(t)}{t^n}\cdot\frac{\psi(t) - t\psi'(t)}{\psi^2(t)} =$$
$$= [t^{-1}]\left(\frac{\psi^n(t)}{t^n} - \frac{\psi^{n-1}(t)\psi'(t)}{t^{n-1}}\right) = [t^{n-1}]\psi^n(t) - \frac{1}{n}[t^{n-2}](\psi^n(t))' = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t).$$

Доказательство теоремы закончено. □

8.2. Тождества Абеля

В этом разделе мы приведем еще одно доказательство теоремы Кэли о перечислении помеченных деревьев. С этим доказательством — да и вообще с перечислением помеченных деревьев, — тесно связано *тождество Абеля*

$$\sum_{i+j=n, i,j>0} \binom{n}{i} i^{i-1} j^{j-1} = 2(n-1)n^{n-2}, \tag{8.3}$$

которое порождает целую серию различных тождеств:

$$\sum_{i+j=n, i,j>0} \binom{n}{i} i^{i-2} j^{j-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-3}, \tag{8.4}$$

$$\sum_{i+j=n, i,j>0} \binom{n}{i} i^{i-2} j^{j-2} = (n-1)(n+6)n^{n-4}, \tag{8.5}$$

и т. д. Эти тождества представляются довольно невероятными: слагаемые в левой части, как правило, содержат множитель n лишь в первой степени, поэтому делимость всей суммы на очень высокую степень n оказывается неожиданным подарком. Вот, например, как выглядит равенство (8.3) при $n=7$:

$$7\cdot 1\cdot 6^5+21\cdot 2^1\cdot 5^4+35\cdot 3^2\cdot 4^3+35\cdot 4^3\cdot 3^2+21\cdot 5^4\cdot 2^1+7\cdot 6^5\cdot 1=2\cdot 6\cdot 7^5.$$

Сформулируем теперь обобщенную теорему Кэли. Сопоставим каждому корневому помеченному дереву Γ с n вершинами моном $a_\Gamma(t)$ степени $n-1$ от переменных $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ следующим образом. Ориентируем все ребра дерева по направлению к его корню и положим

$$a_\Gamma(t)=t_1^{v_1^{in}}\,t_2^{v_2^{in}}\ldots t_n^{v_n^{in}},$$

где через v_i^{in} обозначено число ребер, входящих в i-ую вершину.

Теорема 8.9 (обобщенная теорема Кэли). *Справедливо равенство*

$$\sum_\Gamma a_\Gamma(t)=(t_1+\ldots+t_n)^{n-1},$$

где суммирование ведется по всем помеченным корневым деревьям с n вершинами.

Теорема Кэли очевидным образом вытекает отсюда после подстановки $t_i=1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Доказательство. Для доказательства установим взаимно однозначное соответствие между помеченными корневыми деревьями с n вершинами и *упорядоченными* мономами степени $n-1$ от переменных $t_1,\ \ldots,\ t_n$. Начнем с того, что будем строить моном a_Γ последовательно. Заметим, что при ориентации всех ребер в сторону корня из каждой вершины кроме корня выходит в точности одно ребро, а из корня не выходит ни одного ребра. Выберем из вершин в дереве Γ, в которые не входит ни одно ребро, вершину с наименьшим номером i и начнем запись монома с переменной t_j, где j — номер вершины, в которую ведет ребро из вершины i. Затем удалим вершину i вместе с выходящим из нее ребром и повторим процедуру с оставшимся деревом.

Покажем теперь, что каждый упорядоченный моном степени $n-1$ от переменных $t_1,\ \ldots,\ t_n$ соответствует в точности одному дереву. Для этого восстановим дерево по произвольному упорядоченному моному. Выберем среди переменных, входящих в моном в нулевой степени

(по крайней мере одна такая переменная имеется), переменную с наименьшим номером. Ребро, выходящее из вершины с этим номером, ведет в вершину, номер которой — индекс первой переменной в мономе. Вычеркнем теперь эту первую переменную и повторим процедуру построения очередного ребра с оставшимся упорядоченным мономом, выбирая всякий раз наименьший индекс из еще не использованных вершин, не встречающихся в мономе.

Доказательство теоремы завершено. □

Для доказательства тождества Абеля и смежных тождеств воспользуемся производящей функцией от одной переменной и двух бесконечных серий параметров. Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — конечное (быть может, пустое) подмножество множества натуральных чисел, $|M|$ — число элементов в нем. Положим $t_M = \sum\limits_{i \in M} t_i$ и $f_M(x) = x(x + t_M)^{|M|-1}$. Введем еще один бесконечный набор коммутирующих переменных τ_1, τ_2, τ_3, $\ldots$ и положим $\tau_M = \prod\limits_{i \in M} \tau_i$. Такой моном полностью описывает множество M, и мы будем считать, что $\tau_i^2 = 0$ для всех i (другими словами, множество не содержит одинаковых элементов). В частности,

$$\tau_I \tau_J = \begin{cases} T_{I \cup J}, & \text{если } I \cap J = \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим производящую функцию

$$F(x, \tau) = \sum_{M \subset \mathbb{N}, |M| < \infty} f_M(x) \tau_M.$$

Предложение 8.10. *Функция $F(x, \tau)$ экспоненциальна на переменной x, т. е.*

$$F(x + y, \tau) = F(x, \tau) F(y, \tau). \tag{8.6}$$

Прежде чем доказывать предложение, выведем из него тождество Абеля (8.3). Сравнивая коэффициенты при τ_M в левой и правой частях равенства (8.6), мы получаем равенство

$$f_M(x + y) = \sum_{I \sqcup J = M} f_I(x) f_J(y),$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным разбиениям множества M на два непересекающихся подмножества I и J. Подставив в последнее равенство $t_i = 1$ для $i = 1, 2, \ldots$ и считая, что $|M| = n$,

получаем

$$(x+y)(x+y+n)^{n-1} = \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}} \binom{n}{i} x(x+i)^{i-1} y(y+j)^{j-1} =$$

$$= y(y+n)^{n-1} + x(x+n)^{n-1} + \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} \binom{n}{i} x(x+i)^{i-1} y(y+j)^{j-1}$$

(отличие двух правых частей в том, что в первой из них слагаемые под знаком суммы отвечают неотрицательным значениям индекса, а во второй — строго положительным).

Продифференцировав последнее равенство по x и по y, мы приходим к равенству

$$2(n-1)(x+y+n)^{n-2} + (n-1)(n-2)(x+y)(x+y)^{n-3} =$$
$$= \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} \binom{n}{i} ((x+i)^{i-1} + (i-1)x(x+i)^{i-2})((y+j)^{j-1} + (j-1)y(y+j)^{j-2}). \tag{8.7}$$

Подставляя сюда $x=y=0$, мы получаем в точности тождество Абеля (8.3). Для доказательства тождества (8.4) достаточно продифференцировать (8.7) по x, снова подставить $x=y=0$ и применить тождество Абеля. Дальнейшее дифференцирование по x и y с последующей подстановкой $x=y=0$ приводит к бесконечной двухпараметрической серии тождеств, начинающейся с (8.3), (8.4).

Осталось доказать экспоненциальность функции F.

Доказательство предложения 8.10. Экспоненциальность функции F означает, что она является экспонентой своей линейной по x части:

$$F(x,\,\tau) = e^{\mathcal{F}(\tau)x}, \tag{8.8}$$

где

$$\mathcal{F}(\tau) = \sum_M t_M^{|M|-1} \tau_M.$$

Тождество (8.6) может выполняться при этом и только при этом условии. Сравнивая коэффициенты при $x^k \tau_M$ в левой и правой частях равенства (8.8), приходим к необходимости проверить, что для любого k, $0 \leqslant k \leqslant |M|$,

$$\binom{|M|-1}{k-1} t_M^{|M|-k} = \sum t_{I_1}^{|I_1|-1} \dots t_{I_k}^{|I_k|-1},$$

где сумма в правой части равенства берется по всем упорядоченным разбиениям множества M на k подмножеств. Коэффициент при $t_1^{a_1}\dots t_{|M|}a_{|M|}$ (где $a_1+\ldots+a_{|M|}=|M|-k$) в левой части последнего равенства равен

$$\binom{|M|-1}{k-1}\frac{(|M|-k)!}{a_1!\dots a_{|M|}!}.$$

Тот же коэффициент в правой части имеет вид

$$\sum\frac{(|I_1|-1)!\dots(|I_k|-1)!}{a_1!\dots a_{|M|}!}.$$

Тем самым, нам достаточно доказать, что

$$\binom{|M|-1}{k-1}(|M|-k)!=\sum(|I_1|-1)!\dots(|I_k|-1)!.$$

Но это равенство очевидно имеет место: достаточно сравнить коэффициенты при мономе $t_1^{|M|-k}$. Доказательство предложения завершено. □

8.3. Производящие функции для непомеченных, помеченных, упорядоченных и циклически упорядоченных объектов

Мы видели выше, что некоторые последовательности лучше описываются обыкновенными производящими функциями, а некоторые — экспоненциальными. Впрочем, бывают и исключения. Так, экспоненциальная производящая функция для числа пилообразных перестановок имеет вид тангенса или секанса (в зависимости от четности числа элементов в перестановке, раздел 5.4), а соответствующие обыкновенные производящие функции имеют замечательное представление в виде непрерывных дробей (раздел 5.6).

Однако общее правило гласит, что экспоненциальные производящие функции хорошо описывают помеченные объекты, тогда как непомеченным лучше сопоставлять обыкновенные производящие функции. Объяснение этому состоит в следующем наблюдении. Пусть у нас имеется какой-то класс объектов, и мы рассматриваем конечные упорядоченные последовательности объектов этого класса, а также циклически упорядоченные последовательности таких объектов.

Предложение 8.11. *Если объекты класса помечены и $\mathcal{A}(s)=\sum a_n s^n/n!$ экспоненциальная производящая функция для них, то экспоненциальная производящая функция для последовательностей таких объектов имеет вид $1/(1-\mathcal{A}(s))$, а экспоненциальная производящая функция для циклических последовательностей имеет вид $\ln(1/(1-\mathcal{A}(s)))$.*

Если объекты класса не помечены и $B(s)=\sum b_n s^n$ — производящая функция для них, то производящая функция для последовательностей

таких объектов имеет вид $1/(1-B(s))$, *а производящая функция для циклических последовательностей имеет вид* $\sum \frac{\varphi_k}{k} \ln(1/(1-B(s^k))$, *где* φ_k — *функция Эйлера, число чисел от* 1 *до* k *взаимно простых с* k.

Здесь предполагается, что у объектов имеется какой-то вес (например, число вершин в графе), по которому происходит перечисление, и вес совокупности объектов равен суммарному весу всех объектов в этой совокупности.

Таким образом, именно при сопоставлении помеченным объектам экспоненциальных производящих функций, а непомеченным — обыкновенных, мы приходим к естественным формулам перечисления производных объектов.

8.4. Перечисление плоских и бинарных деревьев

Очевидно, что всякое дерево можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не имели точек пересечения и самопересечения, отличных от вершин. (При этом ребра можно изображать даже в виде отрезков прямой, что нам, впрочем, не понадобится в дальнейшем.) Однако одно и то же дерево можно изображать на плоскости по-разному (см. рис. 8.5). Формализация понятия различных вложений в плоскость дается следующим определением.

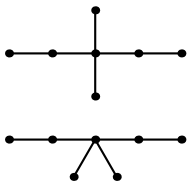


Рис. 8.5. Различные вложения одного дерева в плоскость

Определение 8.12. Два вложения дерева в плоскость называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм плоскости, сохраняющий ее ориентацию и переводящий образ первого дерева в образ второго. Класс эквивалентности вложений деревьев называется *плоским деревом*.

Таким образом, одному дереву могут соответствовать несколько различных плоских деревьев.

Перечисление плоских деревьев остается по-прежнему сложной задачей — различные плоские деревья могут иметь различные порядки симметрии. Для разрушения этой симметрии выберем в дереве *висячий* корень (т. е. вершину валентности 1, *лист*). Ясно, что перевести данное плоское дерево с фиксированным висячим корнем в себя можно только тождественным преобразованием. На рис. 8.6 изображены плоские деревья с висячим корнем с n вершинами ($2 \leqslant n \leqslant 5$). Деревья изображаются растущими от корня вниз. Начало последовательности 1, 1, 2, 5, ... заставляет подозревать, что плоские деревья с висячим корнем перечисляются числами Каталана.

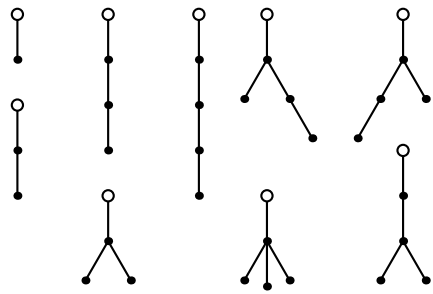


Рис. 8.6. Плоские корневые деревья с висячим корнем, имеющие n ребер ($1 \leqslant n \leqslant 4$)

Отметим, что все деревья с $n \leqslant 6$ вершинами допускают единственное вложение в плоскость,

Теорема 8.13. *Число плоских корневых деревьев с висячим корнем, имеющих $n+2$ вершин, равно n-му числу Каталана c_n.*

Доказательство. В корневом дереве каждой вершине можно сопоставить целое число, равное расстоянию (числу ребер) между этой вершиной и корнем — *уровень* этой вершины. Сам корень имеет уровень 0, ближайшие к нему вершины — уровень 1 и т. д.

Обозначим число плоских деревьев с висячим корнем (в процессе доказательства такой объект мы будем называть просто деревом), имеющих $n+2$ вершин, через p_n. Тогда $p_0 = p_1 = 1$. Для $n > 1$ сопоставим каждому дереву с $n+3$ вершинами два дерева, первое из которых является поддеревом исходного, растущим из самого левого ребра, выходящего из вершины первого уровня, а второе — оставшимся поддеревом исходного дерева (см. рис. 8.7). Копия вершины первого уровня исходного дерева становится корнем первого дерева пары. Если в первом дереве $k+2$ вершин, то во втором дереве $n-k+2$ вершин. Наоборот, имея два дерева с $k+2$ и с $n-k+2$ вершинами, мы можем сопоставить им дерево с $n+3$ вершинами, подклеив корень первого дерева слева к вершине первого уровня исходного дерева.

Таким образом,

$$p_{n+1} = p_0 p_n + p_1 p_{n-1} + \ldots + p_n p_0,$$

и плоские деревья с висячим корнем перечисляются числами Каталана. □

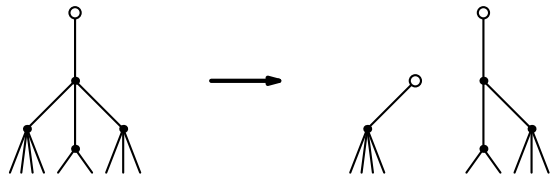


Рис. 8.7. Сопоставление плоскому дереву с висячим корнем пары таких же деревьев

8.5. Задачи

8.1. Докажите, что число различных нумераций вершин данного дерева с n ребрами числами $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ в n раз больше числа различных нумераций его ребер числами $\{1, 2, \ldots, n\}$.

8.2. *Бинарным* деревом называется дерево, в котором валентность каждой вершины равна 1 или 3. Докажите, что число вершин в бинарном дереве четно. Докажите, что число плоских бинарных деревьев с висячим корнем, имеющих $2n$ вершин, равно $(n-1)$-му числу Каталана c_{n-1}.

8.3. Докажите, что производящая функция для числа тернарных (т. е. таких, в которых валентность каждой вершины равна единице или четырем) плоских деревьев с $2(n+1)$ листьями и висячим корнем удовлетворяет уравнению $T(x, y, z) = xTyTzT + 1$. Выведите отсюда, что это число равно $t_n = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{3n}{n}$.

8.4. Установите взаимно однозначное соответствие между плоскими бинарными деревьями с $2n$ вершинами и плоскими корневыми деревьями с $n+1$ вершиной.

8.5. Выведите тождество (8.5).

8.6. Перечислите корневые помеченные леса. (*Лес* — это граф, каждая связная компонента которого — дерево.)

Глава 9

Перечисление вложенных графов

9.1. Вложение графа в поверхность

Плоские деревья являют собой пример вложения графа в плоскость. Одно и то же дерево может допускать различные вложения. В то же время, не каждый граф, как мы увидим ниже, допускает вложение в плоскость. Мы коснемся и вопроса о вложении графа в произвольную двумерную поверхность.

Не вдаваясь в строгое определение двумерной поверхности, мы воспользуемся классификационной теоремой для таких поверхностей, доказываемой в стандартных начальных курсах топологии.

Теорема 9.1. *Всякая (замкнутая ориентируемая двумерная) поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено конечное число ручек.*

Описание, даваемое этой теоремой, мы и будем считать определением поверхности.

Определение 9.2. *Поверхностью* рода g называется двумерная сфера с приклеенными к ней g ручками.

В частности, поверхность рода 0 — это просто сфера, поверхность рода 1 — это тор (см. рис. 9.1).

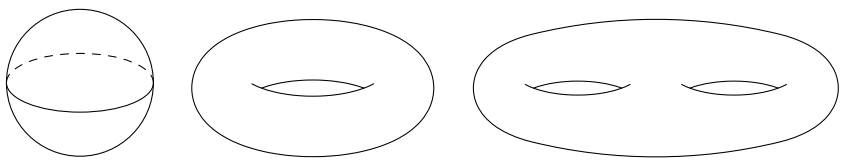


Рис. 9.1. Поверхности рода g при $g = 0, 1, 2$

Под графом мы будем понимать граф, содержащий, возможно, петли и кратные ребра (т. е. две вершины могут быть соединены несколькими ребрами). Графы, допускающие вложение в плоскость (*планарные* графы), — это в точности те же графы, которые допускают вложение в сферу. Действительно, если из сферы выколоть точку, то получится поверхность, гомеоморфная плоскости.

Определение 9.3. *Вложением* связного графа Г в поверхность M называется такое изображение графа на поверхности, что

1) каждой вершине графа сопоставлена точка поверхности M, причем различным вершинам сопоставлены различные точки;

2) каждому ребру графа сопоставлен отрезок несамопересекающейся непрерывной кривой на поверхности M, причем концы этого отрезка совпадают с вершинами, соединяемыми данным ребром, и отрезки, соответствующие различным ребрам, не пересекаются;

3) дополнение к образу графа Г в M представляет собой несвязное объединение *клеток* — двумерных областей, гомеоморфных кругу.

Образ графа при вложении называется *вложенным графом* (*картой*).

Первые два требования в определении совпадают с требованиями в определении вложения графа в плоскость. Третье требование является новым. На самом деле, для изображений графа на сфере оно выполняется автоматически: связный граф может разрезать сферу только на куски, каждый из которых гомеоморфен диску. Для поверхностей большего рода это уже не так: дополнение к образу графа может иметь ручки (см. рис. 9.2). Третье требование призвано исключить подобные вложения из рассмотрения. Мы стремимся к тому, чтобы образ графа разрезал все ручки поверхности.

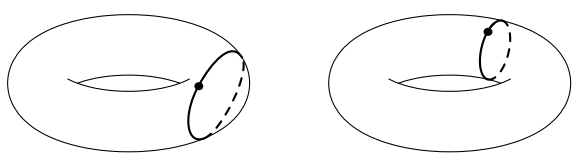


Рис. 9.2. Изображения графа на торе, не являющиеся вложениями

В дальнейшем, допуская некоторую нестрогость языка, образ графа на поверхности мы будем называть просто графом, образы его вершин (соотв., ребер) — вершинами (соотв., ребрами) графа.

На рис. 9.3 приведены примеры графов, вложенных в тор и поверхность рода 2. Уже из этих примеров видно, что один и тот же граф может быть вложен в различные поверхности. Так, например, граф «восьмерка», состоящий из одной вершины и двух петель, допускает вложение и в сферу, и в тор.

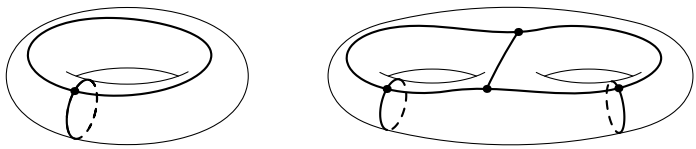


Рис. 9.3. Вложения графов в тор ($g = 1$) и крендель ($g = 2$)

Пусть граф Γ с V вершинами и E ребрами вложен в поверхность M рода g. Обозначим через F число клеток в дополнении к графу Γ на этой поверхности. Тогда числа V, E, F и g связаны между собой знаменитым соотношением Эйлера.

Теорема 9.4 (Эйлер).

$$V - E + F = 2 - 2g.$$

Величина $\chi_g = 2 - 2g$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности M.

Соотношение Эйлера позволяет немедленно сформулировать простое ограничение на максимальный род поверхности, в которую можно вложить данный граф.

Следствие 9.5. *Граф с V вершинами и E ребрами нельзя вложить в поверхность, род которой превышает $(E - V + 1)/2$.*

Действительно, согласно соотношению Эйлера

$$g = (E - V - F + 2)/2 \leqslant (E - V + 1)/2,$$

так как $F \geqslant 1$.

Так, например, граф восьмерка нельзя вложить в поверхность рода больше, чем $(2 - 1 + 1)/2 = 1$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы показать, что любой граф можно вложить в некоторую поверхность. Предположим, что граф Γ уже вложен в поверхность M. Рассмотрим окрестность какой-нибудь его вершины v и отобразим эту окрестность гомеоморфно на плоскость с сохранением ориентации. Образ такой окрестности представляет собой круг, в котором выделена вершина графа и конечный

набор выходящих из нее *полуребер* (см. рис. 9.4). (Некоторые из этих полуребер могут находиться на противоположных концах одного и того же ребра, если в графе имеются петли, примыкающие к выбранной вершине. Число полуребер, примыкающих к вершине, совпадает с ее валентностью.) Зададим на множестве полуребер, исходящих из данной вершины, *циклический порядок*: мы скажем, что полуребро b непосредственно следует за полуребром a, если оно непосредственно следует за полуребром a при движении вдоль границы окрестности против часовой стрелки. На рис. 9.4 полуребра имеют следующий циклический порядок:

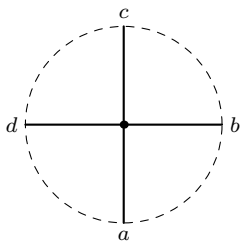


Рис. 9.4. Окрестность вершины валентности 4 вложенного графа

$$\ldots \succ a \succ b \succ c \succ d \succ a \succ \ldots .$$

Таким образом, вложение графа в двумерную поверхность задает циклический порядок на каждом из множеств полуребер, выходящих из каждой из его вершин.

Определение 9.6. *Графом с вращениями* называется граф, в каждой вершине которого задан циклический порядок выходящих из нее полуребер.

Пример 9.7. В графе восьмерка из единственной вершины выходят четыре полуребра. На рис. 9.5 приведены два различных способа задать циклический порядок на этой четверке полуребер (определяемый ориентацией плоскости). Других способов нет. Как мы видели, первый способ реализуется вложением восьмерки в плоскость, второй — ее вложением в тор.

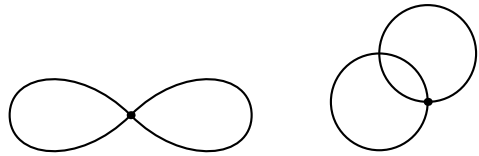


Рис. 9.5. Два различных циклических порядка на множестве полуребер, выходящих из вершины восьмерки

Определение 9.8. *Вложением графа с вращениями* в поверхность называется вложение графа, задающее тот же самый цикли-

ческий порядок на каждом из множеств полуребер, выходящих из каждой вершины, что и в исходном графе.

Оказывается, что не только вложение графа в поверхность определяет соответствующий граф с вращениями, но и по графу с вращениями однозначно восстанавливается поверхность, в которую он вложен.

Теорема 9.9. *Для всякого графа с вращениями существует единственная двумерная замкнутая поверхность, в которую его можно вложить с сохранением вращений.*

Замечание 9.10. Прежде чем доказывать теорему, заметим, что само вложение графа также определено однозначно, если рассматривать его с точностью до гомеоморфизма поверхности. Можно, однако, привлечь и более тонкую классификацию вложений: с точностью до *изотопии*. Два изображенных на рис. 9.6 вложения восьмерки в тор нельзя перевести друг в друга изотопией тора, хотя они и гомеоморфны. Для сферы отношения эквивалентности, определенные гомеоморфизмом и изотопией, совпадают.

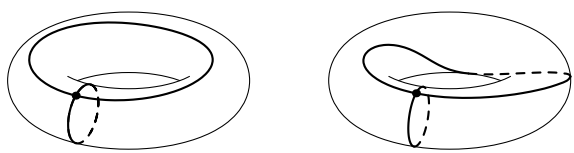


Рис. 9.6. Два гомеоморфных, но не изотопных вложения восьмерки в тор

Замечание 9.11. Планарные графы и графы, допускающие вложения в сферу, — это одно и то же. Однако два различных вложения графа в плоскость могут оказаться одинаковыми как вложения графа в сферу. Простой пример таких вложений приведен на рис. 9.7. Петля делит плоскость на две области — внешнюю и внутреннюю, которые нельзя перевести друг в друга гомеоморфизмом плоскости. На сфере внешняя и внутренняя области неразличимы.

Доказательство теоремы 9.9. Изобразим вершины и выходящие из них полуребра графа Г в виде набора «ежей» на плоскости (см. рис. 9.8). Соединим теперь концы полуребер так, чтобы получить требуемый граф Г. При соединении некоторые из ребер могут, конечно, пересечься. Однако мы потребуем, чтобы они не проходили через вершины графа, и вновь полученные точки пересечения не

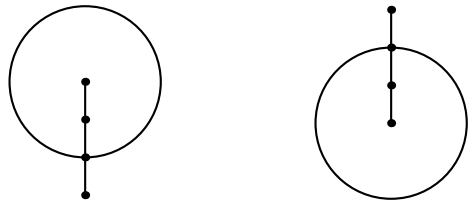


Рис. 9.7. Два различных плоских графа, задающие один и тот же сферический граф

будут считаться вершинами. Расставим на ребрах произвольным образом стрелки («ориентируем» их) и обозначим каждое ребро некоторой буквой так, чтобы различные ребра были обозначены различными буквами. По этим данным мы построим поверхность M, которая не будет зависеть ни от способа расстановки стрелок, ни от обозначения ребер графа буквами.

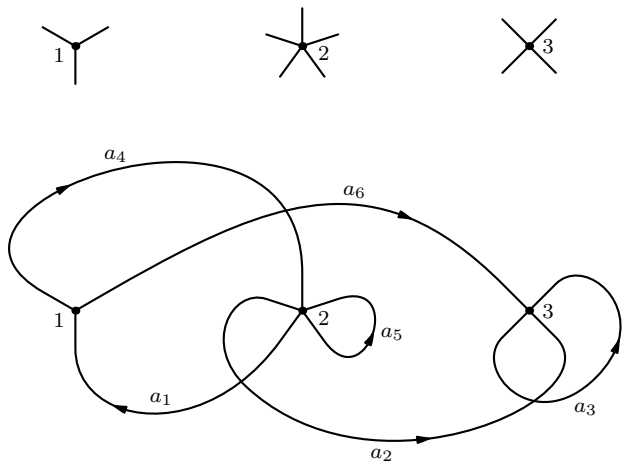


Рис. 9.8. Граф, полученный соединением полуребер ежей (вверху), имеющих заданные циклические порядки

Построение поверхности M разбивается на два шага. Сначала будет определен набор клеток, а затем из этих клеток будет склеена сама поверхность. Мы опишем построение набора клеток для графа с вращениями, изображенного на рис. 9.8. В общем случае построение полностью аналогично.

Клетки набора определяются так. Рассмотрим ребро графа Г, обозначенное буквой a_1. Двигаясь по направлению этого ребра, мы приходим в вершину 1. В вершине 1 задан циклический порядок полуребер, и мы выходим из нее, двигаясь по полуребру, непосредственно следующему за полуребром, по которому мы в нее пришли. Значит, мы выходим по полуребру a_6 и попадаем в вершину 3. Из вершины 3 мы должны выйти по полуребру a_3, следующему за полуребром a_6. Петля a_3 возвращает нас в вершину 3. На этот раз мы должны выйти из вершины 3 вдоль ребра a_6 но в направлении, противоположном указанному стрелкой. Движение по такому ребру будем обозначать буквой a_i^{-1}. На сей раз мы возвращаемся в вершину 1, из которой должны уйти по ребру a_4.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока наш путь не должен будет пройти *по тому же самому ребру и в том же самом направлении, в котором мы уже проходили.*

Запишем пройденный путь в виде слова, в котором каждое ребро обозначено соответствующей ему буквой. Получится слово

$$a_1 a_6 a_3 a_6^{-1} a_4 a_2 a_3^{-1} a_2^{-1}.$$

На следующем шаге путь зацикливается — он должен снова пройти через ребро a_1. Докажем, что это общая ситуация.

Лемма 9.12. *Первым повторившимся ребром пути является начальное ребро этого пути.*

Действительно, предположим, что это не так, и первым должно повториться ребро x, отличное от начального. Посмотрим на ребро пути, предшествующее ребру x. Это ребро определено однозначно вращением полуребер в начальной точке ребра x. Поэтому предыдущее ребро должно было повториться раньше ребра x, и мы пришли к противоречию. □

Сопоставим построенному пути клетку — восьмиугольник, стороны которого поименованы буквами пути в том же циклическом порядке. Для построения очередной клетки возьмем какую-нибудь букву a_i^σ, $i = 1, \ldots, 6$, $\sigma \in \{-1, +1\}$, не вошедшую в уже построенные циклы, и построим цикл, проходящий через соответствующее ребро. В нашем примере можно начать, скажем, с буквы a_5. Тем же способом, что и в лемме, доказывается, что любые два построенные подобным образом цикла либо не пересекаются (не имеют общего ребра, пройденного в одном и том же направлении), либо совпадают. Поэтому все ребра в графе разбиваются на циклы. Результатом этого разбиения явля-

ется набор слов, в котором каждая из букв a_i^σ встречается ровно по одному разу. □

В рассматриваемом примере набор путей имеет вид

$$a_1a_6a_3a_6^{-1}a_4a_2a_3^{-1}a_2^{-1}, \qquad a_5a_4^{-1}a_1^{-1}, \qquad a_5^{-1}.$$

Этому набору путей соответствует набор клеток (см. рис. 9.9), из которых склеивается требуемая двумерная поверхность. Склейка происходит по ребрам, обозначенным буквами, отличающимися лишь показателями степени. Ясно, что вращения, задаваемые построенным вложением, совпадают с исходными. □

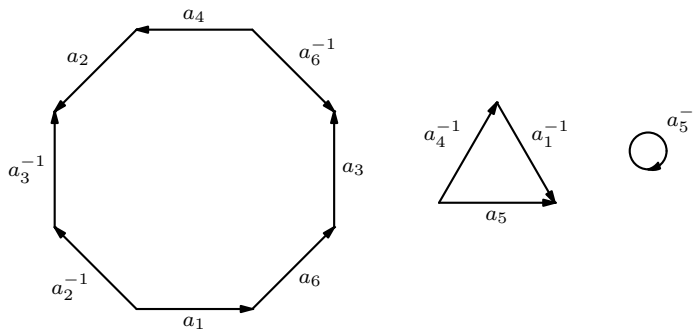


Рис. 9.9. Три клетки с поименованными ребрами, из которых склеивается поверхность вложения графа с рис. 9.8

Замечание 9.13. Из приведенного построения видно, как строить гомеоморфизм поверхности, переводящий одно вложение данного графа с вращениями, в другое. При выбрасывании графа из поверхности вложения она распадается на клетки. Каждую клетку можно считать многоугольником, стороны которого занумерованы ребрами графа (с учетом ориентации). Набор многоугольников не зависит от вложения и строится по графу с вращениями, как показано в доказательстве теоремы. Для построения искомого гомеоморфизма его достаточно склеить из гомеоморфизмов соответствующих клеток, сохраняющих нумерацию ребер.

Замечание 9.14. Можно изучать и вложения графов в неориентируемые поверхности. Такое вложение определяет в окрестности каждой вершины не один циклический порядок на множестве выходящих из нее полуребер, а пару таких порядков, обратных друг к другу.

Указанное соответствие не является взаимно однозначным. Граф, для каждой вершины которого задана пара взаимно обратных вращений на множестве выходящих из нее полуребер, может быть вложен в различные неориентируемые поверхности.

Для графа, вложенного в поверхность, определено понятие двойственного графа, который вложен в ту же самую поверхность. На рис. 9.10 приведены две пары двойственных графов.

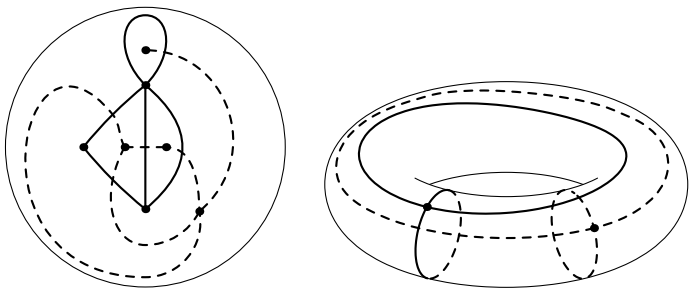


Рис. 9.10. Пары двойственных графов на сфере и торе

Определение 9.15. Пусть граф Г вложен в поверхность M. *Двойственным графом* называется вложенный в M граф $\widetilde{\Gamma}$, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками графа Г, ребра — во взаимно однозначном соответствии с ребрами графа Г, причем циклический порядок полуребер, выходящих из данной вершины двойственного графа, совпадает с циклическим порядком ребер, ограничивающих соответствующую клетку исходного графа.

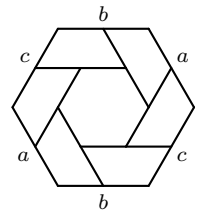


Рис. 9.11. Вложение в тор графа, двойственным к которому является граф K_7

Пример 9.16. В качестве примера двойственного графа опишем вложение графа K_7 — полного графа с семью вершинами — в тор. С помощью этого вложения доказывается, что не у всякого графа на торе вершины можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы соседние вершины были раскрашены в различные цвета. Вложение двойственного графа изображено на рис. 9.11. Тор получается склеиванием противоположных сторон шестиугольника. Каждая из семи клеток полученного в результате разбиения граничит со всеми остальными.

9.2. О числе склеек многоугольника

Замкнутые ориентируемые поверхности можно изготавливать из многоугольников, склеивая их стороны попарно. Например, склеивание противоположных сторон квадрата дает тор (см. рис. 9.12).

Рассмотрим правильный $2n$-угольник и разобьем его стороны на пары всеми возможными способами. Для каждого такого разбиения на пары склеим стороны, принадлежащие одной паре (с сохранением ориентируемости поверхности). Получится замкнутая ориентированная поверхность. Нас будет интересовать, при скольких способах склейки полученная поверхность будет иметь род 0, род 1, ..., род g.

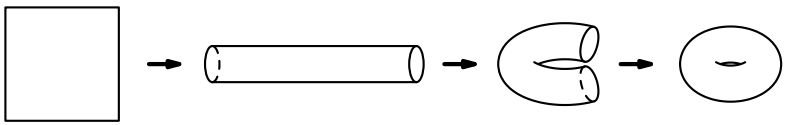


Рис. 9.12. Склеивание тора из квадрата

Начнем, как обычно, с примеров.

Пусть $n = 2$ и мы изучаем склейки квадрата. Стороны квадрата можно разбить на пары тремя способами. Два первых способа при склейке дают сферу; третье разбиение дает тор (см. рис. 9.13). При $n = 3$ имеется 15 способов разбить на пары стороны шестиугольника. Нетрудно видеть, что пять разбиений в первой строке на рис. 9.13 дают при склейке сферу, а 10 остальных — тор.

Заметим, что мы считаем различными склейки, переходящие одна в другую при повороте (или отражении) многоугольника. Это означает, что мы применили один из способов разрушения симметрии. Можно считать, например, что стороны (или вершины) многоугольника перенумерованы. Или, что в многоугольнике выделена начальная сторона (вершина). Соответствующие пометки не изображаются на рисунке, чтобы его не загромождать.

Оказывается, что определить род поверхности по склейке несложно. Образ границы многоугольника при склейке задает вложенный граф на поверхности. Действительно, дополнение к нему — это одна клетка, внутренность многоугольника. Тем самым мы знаем число клеток. Число ребер нам тоже известно: оно равно половине числа сторон $2n$-угольника, т. е. оно равно n. Осталось определить число вершин графа. Для этого можно, скажем, пометить одинаковыми числами вершины многоугольника, которые при склейке переходят в од-

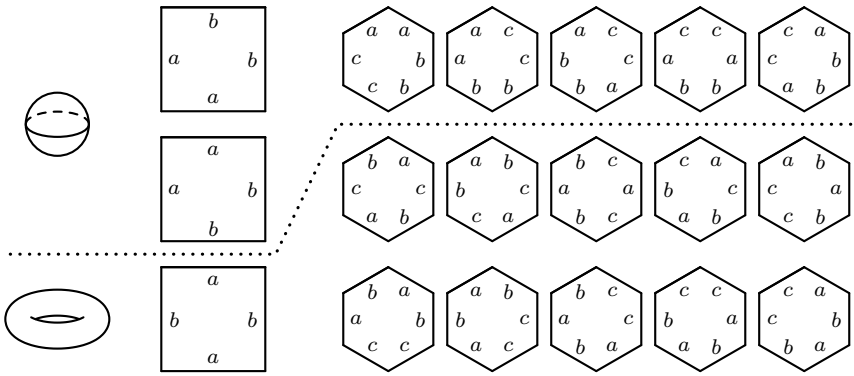


Рис. 9.13. Все возможные склейки сторон квадрата и шестиугольника. Склеиваемые стороны помечены одинаковыми буквами

ну вершину графа (см. рис. 9.14). Число различных пометок и будет равно числу вершин вложенного графа. Так, например, для склейки на рис. 9.14 мы можем вычислить эйлерову характеристику результирующей поверхности:

$$2 - 2g = V - E + F = 2 - 3 + 1 = 0,$$

и поэтому поверхность является тором.

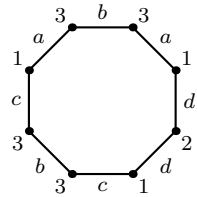


Рис. 9.14. Пометка вершин многоугольника. Вершины, переходящие при склейке в одну вершины вложенного графа, помечены одинаковыми номерами

Таким образом, род результирующей поверхности определяется числом вершин в графе, склеенном из сторон многоугольника.

Наша задача состоит в том, чтобы перечислить склейки $2n$-угольника, приводящие к поверхности рода g. Эта задача имеет естественную переформулировку в терминах двойственных графов. Рассмотрим $2n$-ежа на плоскости. Всевозможные разбиения концов этого ежа на пары определяют различные графы с вращениями, имеющие одну вершину. Спрашивается, сколько из этих графов имеют род g.

Сопоставим каждому числу n многочлен $T_n = T_n(N)$ — производящий многочлен для числа способов склейки сторон $2n$-угольника. Коэффициент при N^V в многочлене T_n равен числу способов склейки сторон $2n$-угольника, при которых склеенный граф имеет в точности V вершин. Род поверхности по этим данным определяется однозначно. Таким, образом, число способов склейки

поверхности рода g из $2n$-угольника равно

$$[N^{n-2g+1}]T_n(N).$$

Выпишем несколько первых многочленов T_n. Положим для удобства $T_0(N) = N$. Далее, $T_1(N) = N^2$: единственная возможная склейка «правильного двуугольника» дает граф с двумя вершинами и одним ребром на сфере. Следующие два многочлена были нами фактически посчитаны:

$$T_2(N) = 2N^3 + N;$$
$$T_3(N) = 5N^4 + 10N^2.$$

Выписывая все возможные склейки правильных 8-ми и 10-угольника, можно вычислить еще пару многочленов:

$$T_4(N) = 14N^5 + 70N^3 + 21N,$$
$$T_5(N) = 42N^6 + 420N^4 + 483N^2,$$

однако уже эти вычисления становятся чрезвычайно трудоемкими.

Нетрудно видеть, что сумма всех коэффициентов многочлена T_n, т. е. его значение при $N = 1$, $T_n(1)$, равна $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$. Действительно, сумма всех коэффициентов многочлена T_n равна числу всех разбиений на пары сторон $2n$-угольника. Число таких разбиений нетрудно сосчитать. В самом деле, возьмем какую-либо сторону многоугольника. Парную ей сторону можно выбрать $2n-1$ различными способами. Если зафиксировать какую-либо из оставшихся $2n-2$ сторон, то парную ей сторону можно выбрать $2n-3$ различными способами, и т. д.

Выпишем производящую функцию двух переменных — обычную по аргументу N и экспоненциальную по аргументу s:

$$T(N;s) = 1 + 2sT_0(N) + 2s^2\frac{T_1(N)}{1!!} + 2s^3\frac{T_2(N)}{3!!} + \ldots =$$
$$= 1 + 2s\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{T_n(N)}{(2n-1)!!}.$$

В 1986 году было найдено удивительно простое и изящное выражение для этой производящей функции.

Теорема 9.17 (Харер, Загир).

$$T(N;s) = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N.$$

Доказательству (к сожалению, неполному) этой теоремы посвящен следующий раздел.

Замечание 9.18. Вывод производящей функции $T(N;s)$ не был главной целью работы Харера и Загира. Сформулированная выше теорема послужила основным техническим результатом при вычислении *виртуальной эйлеровой характеристики пространства модулей* гладких комплексных кривых фиксированного рода g.

Проверим, что приведенная в теореме формула действительно правильно дает первые коэффициенты производящей функции. Имеем,

$$\begin{aligned}
T(N;s) &= (1+s)^N(1-s)^{-N} = \\
&= \Big(1+\frac{N}{1!}s+\frac{N(N-1)}{2!}s^2+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}s^3+\dots\Big)\times \\
&\times\Big(1+\frac{N}{1!}s+\frac{N(N+1)}{2!}s^2+\frac{N(N+1)(N+2)}{3!}s^3+\dots\Big) = \\
&= 1+\Big(\frac{N}{1!}+\frac{N}{1!}\Big)s+\Big(\frac{N(N-1)}{2!}+\frac{N}{1!}\frac{N}{1!}+\frac{N(N+1)}{2!}\Big)s^2+ \\
&+\Big(\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{N}{1!}+\frac{N}{1!}\frac{N(N+1)}{2!}+ \\
&\qquad+\frac{N(N+1)(N+2)}{3!}\Big)s^3+\dots = \\
&= 1+2Ns+2N^2s^2+2\frac{2N^3+N}{3}s^3+\dots,
\end{aligned}$$

и по крайней мере начальные члены разложения совпадают с уже вычисленными нами ранее.

9.3. Доказательство теоремы Харера—Загира

Обратим внимание, во-первых, на последовательность коэффициентов при старших степенях многочленов T_n. Эта последовательность начинается так: 1, 1, 2, 5, 14, ..., и у нас есть основания предположить, что она совпадает с последовательностью чисел Каталана.

Лемма 9.19. *Степень многочлена T_n равна $n+1$. Коэффициент при N^{n+1} в многочлене $T_n(N)$ равен c_n, n-му числу Каталана.*

Доказательство. По формуле Эйлера число вершин в графе на склеенной поверхности рода g определяется из равенства

$$2-2g = V-E+F = V-n+1,$$

откуда $V = n + 1 - 2g \leqslant n + 1$, так как род g неотрицателен. Последнее неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $g = 0$, т. е. склеенная поверхность — сфера.

Назовем две пары сторон многоугольника *перемежающимися*, если между двумя сторонами из первой пары есть сторона из второй пары, в каком бы направлении мы ни обходили границу многоугольника. Другими словами, две пары сторон перемежаются, если отрезки, соединяющие середины каждой пары сторон, пересекаются. Если в разбиении сторон на пары есть перемежающиеся пары, то их склейка дает ручку (см. рис. 9.15), и результирующая поверхность не может

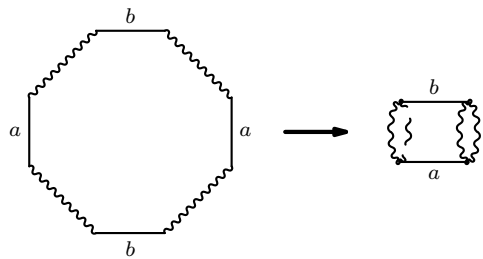
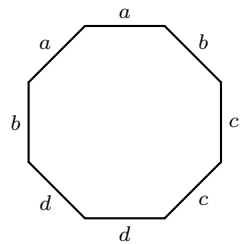


Рис. 9.15. Склейка ручки из перемежающихся пар сторон

являться сферой. Наоборот, если в разбиении нет перемежающихся пар, то результирующая поверхность — сфера. Действительно, в таком разбиении можно выбрать пару смежных склеивающихся друг с другом сторон. Их склейка дает многоугольник с меньшим числом сторон, которые разбиты на неперемежающиеся пары, и мы можем действовать по индукции.

Разбиения сторон $2n$-угольника на пары, в которых нет перемежающихся пар, находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством правильных скобочных структур из n пар скобок. Действительно, зафиксируем какую-либо начальную вершину многоугольника и будем двигаться от нее вдоль границы многоугольника против часовой стрелки. Каждой проходимой стороне многоугольника сопоставим левую или правую скобку по следующему правилу: если проходимая сторона — первая из пары, то мы сопоставляем ей левую скобку, в противном случае — правую (см. рис. 9.16). Ясно, что получившаяся скобочная структура будет правильной, и что любую правильную скобочную структуру можно получить ровно один раз.

Лемма доказана. □



$(\,(\,)\,(\,)\,)\,(\,)$
$bddccbaa$

Рис. 9.16. Разбиение сторон 8-угольника на пары без перемежающихся пар и соответствующая скобочная структура

Дальнейшее доказательство теоремы Харера—Загира разбивается на две части. Первую его часть составляет следующая лемма.

Лемма 9.20. *Рассмотрим выражение* $t(N,\,n) = \dfrac{T_n(N)}{(2n-1)!!}$ *как функцию от* n *при фиксированном* N. *Тогда* $t(N,\,n)$ — *многочлен от* n *степени* $N-1$.

Первое доказательство этого факта, хотя и не очень сложное, использует нетривиальную технику интегрирования по пространству эрмитовых матриц. Недавно появилось чисто комбинаторное доказательство, принадлежащее Бодо Лассу. Оно, однако, тоже довольно трудоемкое. Я отсылаю заинтересовавшегося читателя к оригинальным работам.

Оставшаяся часть доказательства носит вполне комбинаторный характер.

Предположим, что вершины $2n$-угольника раскрашены в несколько цветов. Будем говорить, что склейка сторон многоугольника *согласована с раскраской*, если она склеивает только вершины одинакового цвета.

Лемма 9.21. *Число* $T_n(N)$ *есть в точности число склеек сторон* $2n$*-угольника, согласованных с раскраской его вершин в* (*не более чем*) N *цветов.*

Доказательство. Действительно, пусть в результате склейки граница многоугольника переходит в граф с V вершинами. Раскрасим каждую вершину графа в один из N цветов. Каждая такая раскраска задает раскраску вершин исходного многоугольника, согласованную с выбранной склейкой. Всего же раскрасить V вершин графа в N цветов можно в точности N^V способами. Поэтому общее число склеек,

согласованных с раскрасками, есть сумма чисел N^V по всем склейкам, что в точности совпадает с определением многочлена $T_n(N)$. $\square$

Введем функцию $\overline{T}_n(N)$ — число склеек $2n$-угольника, согласованных с раскраской его вершин *в точности* в N цветов. Тогда

$$T_n(N) = \sum_{L=1}^{N} \binom{N}{L} \overline{T}_n(L). \tag{9.1}$$

Действительно, L цветов могут быть выбраны из N цветов в точности $\binom{N}{L}$ способами. При этом $\overline{T}_0(N) = \overline{T}_1(N) = \ldots = \overline{T}_{N-2}(N) = 0$, так как, в силу леммы 9.19, склеек, согласованных с раскраской вершин $2n$-угольника более чем в $n+1$ цвет, не существует.

Функция $\bar{t}(N, n) = \dfrac{\overline{T}_n(N)}{(2n-1)!!}$ является многочленом по n степени $N-1$, причем мы знаем $N-1$ корней этого многочлена: $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-2$. Поэтому существует такая постоянная A_N, что

$$\bar{t}(N, n) = A_N n(n-1)\ldots(n-N+2) = A_N \binom{n}{N-1}(N-1)!.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (9.1), мы получаем

$$T_n(N) = (2n-1)!! \sum_{L=1}^{N} A_L \binom{n}{L-1} \binom{N}{L} (L-1)!.$$

В частности, старший коэффициент по N этого многочлена равен

$$(2n-1)!! \frac{A_{n+1}}{(n+1)}.$$

С другой стороны, по лемме 9.19, этот коэффициент равен n-му числу Каталана:

$$(2n-1)!! \frac{A_{n+1}}{(n+1)} = c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Отсюда $A_{n+1} = \dfrac{2^n}{n!}$, и поэтому

$$T_n(N) = (2n-1)!! \sum_{L=1}^{N} 2^{L-1} \binom{N}{L} \binom{n}{L-1}.$$

Эта формула в точности совпадает с формулой для разложения функции $\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^N$ по степеням s:

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^N = (1 + 2s + 2s^2 + 2s^3 + \ldots)^N = 1 + s \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{L=1}^{N} 2^L \binom{N}{L} \binom{n}{L-1} s^n.$$

Теорема Харера—Загира доказана.

9.4. Задачи

9.1. Оцените минимальный и максимальный род поверхности, в которую можно вложить граф K_n — полный граф с n вершинами. (*Полным* называется граф, в котором любые две вершины соединены в точности одним ребром.)

9.2. Существуют ли вложения графа Петерсена (см. рис. 9.17) в а) тор; б) поверхность рода два?

9.3. Можно ли вложить в тор граф K_2^4, составленный из ребер четырехмерного куба?

9.4. С помощью формулы Эйлера докажите простую часть *теоремы Куратовского*: графы K_5 и $K_{3,3}$ нельзя вложить в сферу.

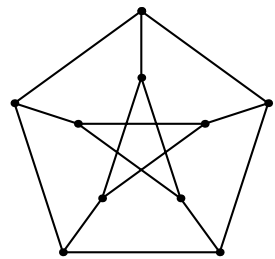


Рис. 9.17. Граф Петерсена

9.5. Можно ли вложить в проективную плоскость графы а) K_5; б) $K_{3,3}$? Если да, то приведите соответствующие вложения.

9.6. Пусть Г — это граф, образованный ребрами икосаэдра. Из каждой вершины икосаэдра выходит 5 ребер в естественном циклическом порядке $\ldots 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \ldots$ Заменим естественный циклический порядок выходящих ребер в каждой вершине на порядок $\ldots 1 \succ 3 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 1 \ldots$ («звездчатый икосаэдр»). Вычислите род поверхности, в которую вкладывается звездчатый икосаэдр.

9.7. Докажите, что склейка сторон многоугольника дает сферу в том и только в том случае, если граф, образованный сторонами многоугольника на склеенной поверхности, является деревом.

9.8. Докажите, что род поверхности, которую можно склеить из $2n$-угольника, не превосходит $\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

9.9. Выпишите производящую функцию для числа склеек $2n$-угольника, дающих тор.

9.10. Докажите, что при четном n многочлен $T_n(N)$ нечетен и наоборот.

9.11. Опишите все попарно неизотопные вложения восьмерки в тор.

Заключительные замечания и указания к библиографии

На русском языке имеется несколько монографий, в которых изложение метода производящих функций занимает одно из центральных мест. В первую очередь следует отметить две книги [3] и [7] под одинаковым названием «Перечислительная комбинаторика». Помимо богатого материала (который частично перекрывается с изложенным в настоящей книге и в значительной степени дополняет его) там приведено большое количество исторических сведений и обширная библиография. Поэтому мы позволили себе не сопровождать изложение историческими замечаниями, чтобы не отвлекать внимание читателя. Приводимый ниже список литературы также не претендует на полноту и предназначен, в первую очередь, для отсылки к публикациям, не входившим ранее в монографии.

Несмотря на то, что с момента первого издания книги Полиа и Сеге [4] прошло уже три четверти века, она по-прежнему остается одной из лучших книг по комбинаторике и, в том числе, по методу производящих функций. В настоящую книгу включено много задач из этого сборника. Частично задачи взяты также из уже упоминавшихся книг [3] и [7], других источников, а также придуманы мной самостоятельно. Перечислительные аспекты теории графов описаны в [8]. Из других изданий на русском языке отметим книгу Сачкова [6] и уже несколько устаревшую книгу Риордана [5].

Вывод уравнений на производящие функции для языков, порожденных контекстно-свободными грамматиками, следует подходу, изложенному в [11] (см. также ссылки там). Связь этого подхода с уравнением Лагранжа подробно описана в [16, 17]. Треугольник Бернулли—Эйлера введен и подробно изучен В. И. Арнольдом [9, 10, 1, 2] в связи с исследованием различных функциональных топологических пространств.

Все, что связано с представлением производящих функций в виде непрерывных дробей, я взял из работ Флажоле [12, 13]. Изложение вопросов асимптотики коэффициентов и ее связи с характером особенностей функций следует [14]. Доказательство теоремы Харера—Загира воспроизводит — с существенными купюрами — исходное доказательство [15]. Чисто комбинаторное доказательство см. в [18].

Там же имеется доказательство обобщенной теоремы Кэли, которое восходит к Прюферу [19].

Литература

[1] В. И. Арнольд. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. Т. 47, вып. 1. С. 3—45.

[2] В. И. Арнольд. Сравнения для чисел Эйлера, Бернулли и Спрингера групп Кокстера // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 1129—1133.

[3] Я. Гульден, Д. Джексон. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.

[4] Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. М.: Наука, 1978.

[5] Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.

[6] В. Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.

[7] Р. Стэнли. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.

[8] Ф. Харари, Э. Палмер. Перечисление графов. М.: Мир, 1976.

[9] V. I. Arnold. Bernoulli—Euler updown numbers of functions singularities, their arithmetics and combinatorics // Duke Math. J. 1991. V. 63. P. 537—555.

[10] V. I. Arnold. Springer numbers and morsification spaces // J. Algebraic Geometry. 1992. V. 1. P. 197—214. [Русский перевод: Числа Спрингера и пространства морсификаций // В. И. Арнольд. Избранное. М.: Фазис, 1997. С. 505—524.]

[11] M.-P. Delest, G. Viennot. Algebraic languages and polyminoes enumeration // Theoretical Computer Science. 1984. V. 34. P. 169—206. [Русский перевод: М.-П. Делест, Ж. Вьенно. Алгебраические языки и перечисление полимино // Киб. сборник. нов. серия. Вып. 26. М.: Мир, 1989. С. 113—156.]

[12] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions // Discrete Mathematics. 1980. V. 32. P. 125—161.

[13] P. Flajolet. On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities // Discrete Mathematics. 1982. V. 41. P. 145—153.

[14] P. Flajolet, A. Oldyzko. Singularity Analysis of Generating Functions // SIAM J. Disc. Math. (May 1990). V. 3, 2. P. 216—240.

[15] J. Harer, D. Zagier. The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves // Inv. Math. 1986. V. 85. P. 457—485.

[16] S. K. Lando, A. K. Zvonkin. Meanders // Selecta Mathematica Sovietica. 1992. V. 11, 2. P. 117—144.

[17] S. K. Lando, A. K. Zvonkin. Plane and projective meanders // Theoretical Computer Science. 1993. V. 117. P. 227—241.

[18] B. Lass. Démonstration combinatoire de la formule de Harer–Zagier // C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. 2001. V. 333, № 3. P. 155—160.

[19] H. Prüfer. Neuer Beweis eines Satges über Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. V. 27. P. 742—744.

Предметный указатель

Алгебро-логарифмическая особая точка, 54
Асимптотика, 46

Бернулли—Эйлера треугольник, 62
Беспорядок, 101
Бинарное дерево, 122
Бином Ньютона, 16

Валентность, 111
Вершина графа, 111
Вложение графа, 124
Вложенный граф, 124

Гипергеометрическая последовательность, 48
Грамматика контекстно-свободная, 42
— с однозначным выводом, 42
Граф, 111
— вложенный, 124
— двойственный, 131
— полный, 139
— с вращениями, 126
— связный, 112
Гурвица функция, 59

Двойственный граф, 131
Дерево, 112
— бинарное, 122
— плоское, 120
Дзета-функция Римана, 102
Диагональная триангуляция, 30
Диаграмма Ферре, 89
— Юнга, 89
Дика путь, 32
— треугольник, 61
— язык, 38
— — второго порядка, 45
Дирихле производящая функция, 102

Длина слова, 38

Интеграл производящей функции, 17
Инцидентности отображение, 111

Каталана число, 28
Квазимногочлен, 27
Критическая точка, 63
Критическое значение, 64

Лагранжа теорема, 43
— уравнение, 41, 43
Лес, 122
Лист дерева, 120

Метод стационарной фазы, 11
Мѓбиуса последовательность, 103
— функция, 103
Морсовский многочлен, 64
Моцкина путь, 34
— число, 34
— язык, 45
Мультиномиальный коэффициент, 94
Мультипликативная последовательность, 106

Непрерывная дробь, 71
Неразложимое слово, 40

Обратная функция, 19
Особая точка алгебро-логарифмическая, 54
Отображение инцидентности, 111

Палиндром, 45
Паскаля треугольник, 57
Петля, 111
Пилообразная перестановка, 64

Плоское дерево, 120
Полный граф, 139
Последовательность Мчбиуса, 103
— мультипликативная, 106
Правила вывода в языке Дика, 38
Правило вывода, 42
Правильная скобочная структура, 28
Произведение Адамара, 26
Производная производящей функции, 17
Производящая функция, 13
— Дирихле, 102
— экспоненциальная, 59
— языка, 38
Производящий многочлен, 13
— ряд, 13
Пустое слово, 38
Путь Дика, 32
— Моцкина, 34

Разбиение, 87
— множества, 93
— симметричное, 89
Разложение, 86
Ребро графа, 111
Римана дзета-функция, 102

Связный граф, 112
Симметричные разбиения, 89
Система меандров, 56
Скобочная структура правильная, 28
Слово, 38
— пустое, 38

Счастливый билет, 7

Тангенциальные числа, 67
Теорема Лагранжа, 43
— Харера—Загира, 134
— Эйлера, 125
Треугольник Бернулли—Эйлера, 62
— Дика, 61
— Паскаля, 57
Триангуляция диагональная, 30

Уравнение Лагранжа, 41, 43

Ферре диаграмма, 89
Функция Гурвица, 59
— Мчбиуса, 103

Харера—Загира теорема, 134

Цикл в графе, 112

Числа Эйлера, 68
Число Каталана, 28
— Моцкина, 34
— сочетаний, 16

Эйлера теорема, 125
— числа, 68
Эйлерова характеристика, 125
Экспоненциальная производящая функция, 59

Юнга диаграмма, 89

Язык, 38
— Дика, 38
— — второго порядка, 45
— — правила вывода, 38
— Моцкина, 45